
THEORIE DE DECOMPOSITION DES PHENOMENES CYCLIQUES

Chapitre 1 sur 6 :

Formule Mathématique de
Factorisation d'un Nombre Entier
(en Produit de Nombres Premiers)

par WEIDMANN Sébastien

(travaux débutés en Octobre 2006)

Modifications éventuelles et droits d'utilisation

Je me réserve le droit d'apporter des modifications ou des corrections à tout instant si j'estime que cela est nécessaire (notamment pour corriger des erreurs éventuelles ou compléter des réflexions qui pourraient être insuffisantes).

Certains passages ne sont pas complets car ils sont secondaires (non essentiels à la compréhension globale de cette théorie), mais ils sont en cours de réalisation. Cela est précisé lorsque c'est le cas.

Le **Chapitre 4** est un chapitre important mais il ne sera publié intégralement que lorsque j'estimerai que mes travaux le concernant auront atteint une maturité satisfaisante.

Il n'y a pas de contrainte de temps concernant ces travaux en cours de réalisation.

Travaux en 6 Chapitres, débutés en Octobre 2007. Tous droits réservés à **WEIDMANN Sébastien**, né à Chaumont (52 000), FRANCE.

Toute personne désirant utiliser partiellement ou complètement cette théorie peut le faire à la seule condition de le mentionner et d'associer à cette mention mes nom et prénom (aux parties ou formules utilisées, par exemple). Ceci offre quelques souplesse et liberté d'utilisation.

La redistribution de ces fichiers est également autorisée à condition de ne pas en modifier le contenu. **Aucune modification ne peut être faite sans mon accord.**

Par conséquent, pour d'éventuelles suggestions, merci de me contacter par l'intermédiaire du site **FUTURA-SCIENCES** (vous devez être inscrit comme membre, l'inscription est relativement simple) :

(ne vous attendez pas à une réponse systématique de ma part)

Cliquez ici pour m'envoyer un mail (message privé, pseudo : **WizartS**)

Vue d'ensemble de cette théorie

CHAPITRE 1 :

FORMULE MATHEMATIQUE
DE FACTORISATION D'UN NOMBRE ENTIER
(EN PRODUIT DE NOMBRES PREMIERS).

CHAPITRE 2 :

RECONSTITUTION DE FONCTIONS CONNUES,
LIENS AVEC LES POLYNOMES.

CHAPITRE 3 :

REPARTITION EXACTE DES NOMBRES PREMIERS.

CHAPITRE 4 :

ETUDE DE LA FONCTION ζ DE RIEMANN
ET DU NOMBRE π .

CHAPITRE 5 :

REFLEXIONS LOGIQUES
ET PHILOSOPHIQUES.

CHAPITRE 6 :

THEORIE PHYSIQUE
DE DECOMPOSITION DES
PHENOMENES CYCLIQUES.

Chapitre 1 :

FACTORISATION D'UN NOMBRE ENTIER

Modifications éventuelles et droits d'utilisation / mail	2
VUE D'ENSEMBLE DE CETTE THEORIE (6 CHAPITRES)	3
Introduction générale	7
Rappels	9
Remarque préalable	10
1 Factorisation et mécanique des puissances	11
1.1 Etude de la puissance de 2	14
1.2 Etude de la puissance de 3	19
1.3 Etude de la puissance de 5	23
1.4 Etude de la puissance de 11	27
1.5 Etude de la puissance de P_n	30
1.6 Problème lorsque P_n est inconnu	32
1.7 Formule $D(N)$ de factorisation d'un Nombre Entier	35
1.8 Simplifications possibles pour $D(N)$	37
2 Démonstration complète	43
2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre	43
2.2 Démonstration complète	45
2.2.1 Remarques préalables sur le tableau de référence T.R.2	48
2.2.2 Début de l'étude	53
2.2.3 Construction de la fonction F_p	91
2.2.4 Supposons P_n non connu (construction de F_p , suite)	120
2.2.5 Construction de la fonction α_M	131

2.3	Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers	137
3	Formules courtes	139
3.1	Formule simplifiée $s(M)$	139
3.2	Formule d'identité $I(M)$	145
3.3	Formule de comptage $C(M)$	145
3.4	Formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(M)$	146
3.5	Formule d'Impulsion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$	154
3.6	Formule de restriction $RM(N)$	158
3.7	Equivalences de formules	164
3.8	Autres formules intéressantes	194
3.8.1	Nombres factoriels et divisibilité par P_n	194
3.8.2	Produit de nombres factoriels et divisibilité par P_n . . .	199
3.8.3	Puissance de nombres factoriels et divisibilité par P_n .	204
3.8.4	Puissances de nombres factoriels contenant une puissance	207
3.8.5	Nombres factoriels, formule simplifiée $s(M)$ et divisibilité	212
3.8.6	Formule $f(M;x)$, puissance et divisibilité : Formule $D(N)$ généralisée	217
3.8.7	Produit de nombres factoriels et divisibilité par M , généralisation	228
3.8.8	Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de RIEMANN	240
3.8.9	Réécriture de la conjecture de GOLDBACH	244
4	Remarques : formule $D(N)$ et phénomènes physiques associés	249

Introduction générale

Les travaux qui vont suivre sont issus d'une remarque simple mais d'une importance fondamentale sur la régularité des variations de la puissance de chaque nombre premier P_n , dont la puissance est notée α_n , dans le cas de la factorisation d'un nombre entier positif $N \geq 2$. L'étude sera divisée en plusieurs parties car elle fait intervenir plusieurs formules utiles pour atteindre cet objectif. Nous terminerons en donnant simplement une formule unique permettant cette factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers.

Je précise que je suis l'auteur unique de ces réflexions, de ces démonstrations, de ces travaux et de leurs conclusions, et du contenu de ces 6 chapitres dont le plan est donné précédemment.

Je désire par avance prévenir le lecteur que je ne suis pas mathématicien ou scientifique de profession. J'ai pourtant un goût et un intérêt très prononcé pour ces disciplines, et les thèmes de la logique en général, activités auxquelles j'aimerais participer davantage. J'aime m'intéresser avant tout aux problèmes non résolus. Pour cette raison, on pourrait trouver que mes démonstrations seraient peut-être un peu rapides, mais je donnerai des exemples en nombre suffisant lorsque nécessaire pour vous convaincre de l'importance d'un phénomène qui semble se manifester dans un ordre, et non pas au hasard. Je me suis intéressé de très près aux nombres premiers après m'être intéressé aux systèmes réguliers auxquels j'ai trouvé des formules en marge de ma formation scolaire. Je pense désormais que les nombres premiers apparaissent de manière régulière, je désire donc informer le plus possible sur mes découvertes. Il existe une formulation pour dire que les nombres premiers ne sont divisible que par 1 et par eux-même, il doit donc exister une formule équivalente pour l'exprimer aussi en langage mathématique. Le but est clairement de connaître de manière précise la répartition des nombres premiers, ou à quels "moments" ils apparaissent. Pour cela, les travaux sont divisés

en deux ensembles importants. Un **Premier Chapitre** qui porte sur la factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers, les deux chapitres suivants portent sur la répartition exacte des nombres premiers. Il m'a semblé intéressant d'aborder un **Deuxième Chapitre** du fait des propriétés de fonctions étudiées dans le **Premier Chapitre**. En effet, celui-ci permettra d'établir des liens intéressants entre divers fonctions connues (notamment les polynômes à coefficients entiers). Le **Troisième Chapitre** donne la répartition exacte des nombres premiers (en conséquence des formules étudiées dans le premier et dans le **Deuxième Chapitre**).

Par conséquent et j'insiste sur ce point, ces travaux sont plus une réflexion permettant de fournir des réponses théoriques aux problèmes liés aux nombres premiers qu'une méthode pratique pour parvenir à des calculs rapides.

L'étude du **Quatrième Chapitre** se propose au contraire de rechercher une méthode pour rendre optimal le calcul des nombres premiers (partiellement vue en **Chapitre 1**), l'objectif étant de les rendre exploitable en pratique, ce qui en fait un chapitre nettement plus ambitieux.

Le **Cinquième Chapitre** permet de développer des approches strictement logiques, mais aussi philosophiques qu'il m'a semblé intéressant d'exposer. Il est au moins aussi important que les autres étant donné qu'il permet de nous guider au **Sixième Chapitre** en donnant un ensemble de règles utiles pour une orientation vers la représentation de phénomènes physiques.

Finalement, et s'appuyant sur les chapitres précédents, ce **Dernier Chapitre** se propose d'établir un lien avec des phénomènes physiques cycliques, et notamment un lien avec des phénomènes quantique (mathématiques appliquées), en faisant la synthèse des points essentiels que nous allons étudier au cours de cette théorie.

A noter :

Une démonstration plus complète de ce qui va suivre est proposée dans la partie intitulée "**2 Démonstration complète**" (page 43). La partie "**1 Factorisation et mécanique des puissances**" (page 11) n'étant ici que pour appuyer et renforcer par des exemples précis la partie démonstration. Celle-ci permet également de s'accoutumer et à se persuader du phénomène régulier qui se produit concernant les nombres premiers.

Rappels

- Tout d'abord, Il a déjà été démontré de plusieurs manières différentes dans l'Histoire qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- Rappelons que tout nombre $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 2$, est factorisable en produit de nombres premiers $P_n \in \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) de cette manière :

$$N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times P_3^{\alpha_3} \times \dots \times P_n^{\alpha_n}$$

avec $P_1 = 2$, et tel que $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$,
 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ étant des nombres premiers consécutifs
(c'est-à-dire $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 7$, $P_5 = 11 \dots$).

- Nous pourrions nous limiter à un nombre de termes "utiles" (limité par n) ou encore écrire N sous la forme d'un produit d'une infinité de nombres premiers P_n :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Dans ce cas, les termes non utiles auront leur puissance $\alpha_n = 0$ (notamment tous les P_n supérieur au plus grand nombre premier utile à la factorisation).

- Mais il faut aussi noter que nous aurions pu écrire ce nombre comme produit de tous les nombres entiers $M_i \in \mathbb{N}$, $M_i \geq 2$ ainsi :

$$N = \prod_{i=1}^{i \rightarrow +\infty} (M_i)^{a_i}$$

Dans ce cas, nous pouvons ramener cette formule à la formule précédente car les seuls termes utiles sont ceux contenant des nombres premiers. En effet, la plupart des puissances a_i pourront être égales à 0, notamment lorsque $M_i \notin \mathbb{P}$, et, dans le cas où $M_i \in \mathbb{P}$, lorsque M_i n'est pas un nombre premier utile à la factorisation de N .

Remarque préalable

Nous noterons que :

$$N = P_n \quad \text{si} \quad \sum_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 1$$

Remarquons ici aussi que nous pourrions nous limiter à une somme de termes utiles plutôt qu'à une somme infinie (Ce que nous tenterons de faire).

1

Factorisation et mécanique des puissances

Commençons par la formule suivante :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Avec $P_n \in \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$),
avec $P_1 = 2$, et tel que $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$,
 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ étant des nombres premiers consécutifs
(c'est-à-dire $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 7$, $P_5 = 11 \dots$).

Rappel évident :

α_1 correspond à la puissance de P_1
 α_2 correspond à la puissance de P_2
 α_3 correspond à la puissance de P_3
...
 α_n correspond à la puissance de P_n

Nous pouvons construire un tableau de référence *T.R.1* (qui est immuable)
où la première colonne représente N , et toutes les suivantes représentent les
 α_n qui correspondent à N :

Exemple préalable pour $N = 12$, $N = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times \dots \times P_n^0 \times \dots$
Donc $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 0$; $\alpha_4 = 0$; ... $\alpha_n = 0$; ...

[illegible]

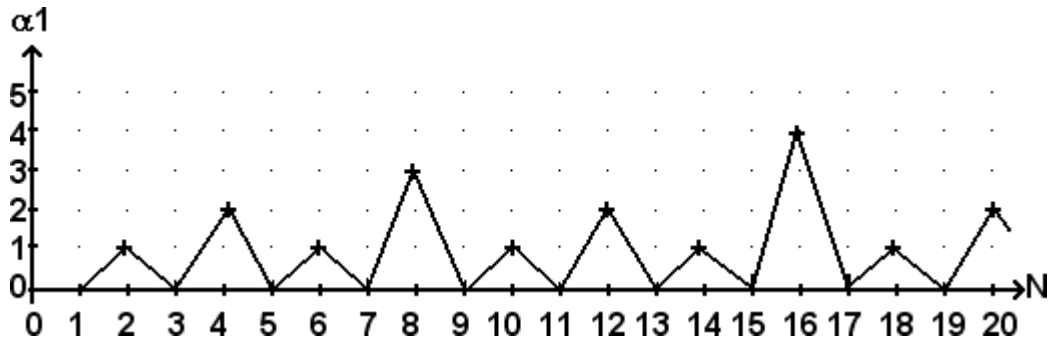
La compréhension de ce tableau est essentielle pour la suite de l'étude de la factorisation d'un nombre entier. Nous remarquons aisément des symétries et des régularités à l'intérieur de chaque colonne. De plus, les données de ce tableau sont immuables (elles seront toujours constantes) : nous pouvons donc nous en servir en permanence. Par la suite, nous allons donner une représentation graphique à ces données, et pour plus de lisibilité, nous allons lier chaque point du graphique par des segments (ceux-ci ne représentant donc pas une continuité, puisque passer d'un nombre entier à un autre invoque nécessairement la discontinuité). Comme nous allons le voir, et pour N un nombre entier positif, chaque graphique correspondant à une puissance α_n est assimilable à une "onde" qui peut être décomposée en somme de plusieurs ondes plus simples.

Remarque :

Le tableau de référence $T.R.1$ peut être construit de manière "mécanique", une fois que l'on comprend comment se répètent (par symétries) et s'incrémentent les valeurs dans une colonne α_n . Nous pouvons déjà constater facilement qu'un nombre N est un nombre premier si et seulement si la somme de toutes les valeurs de α_n (pour un nombre N , cela correspondant à une ligne complète de valeurs de α_n) vaut 1.

1.1 Etude de la puissance de 2

Colonne α_1 , correspondant à $P_1 = 2$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 2 (c'est-à-dire P_1) grâce à la "courbe" de α_1 .

On distingue clairement ces symétries sur des longueurs finies :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 2$ de Longueur $L_1 = 2$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_2 en $N = 4$ de Longueur $L_2 = 6$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_3 en $N = 8$ de Longueur $L_3 = 14$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_4 en $N = 16$ de Longueur $L_4 = 30$ sur l'axe N ;
 ...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_1)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_1)^a - 2$ sur l'axe N .

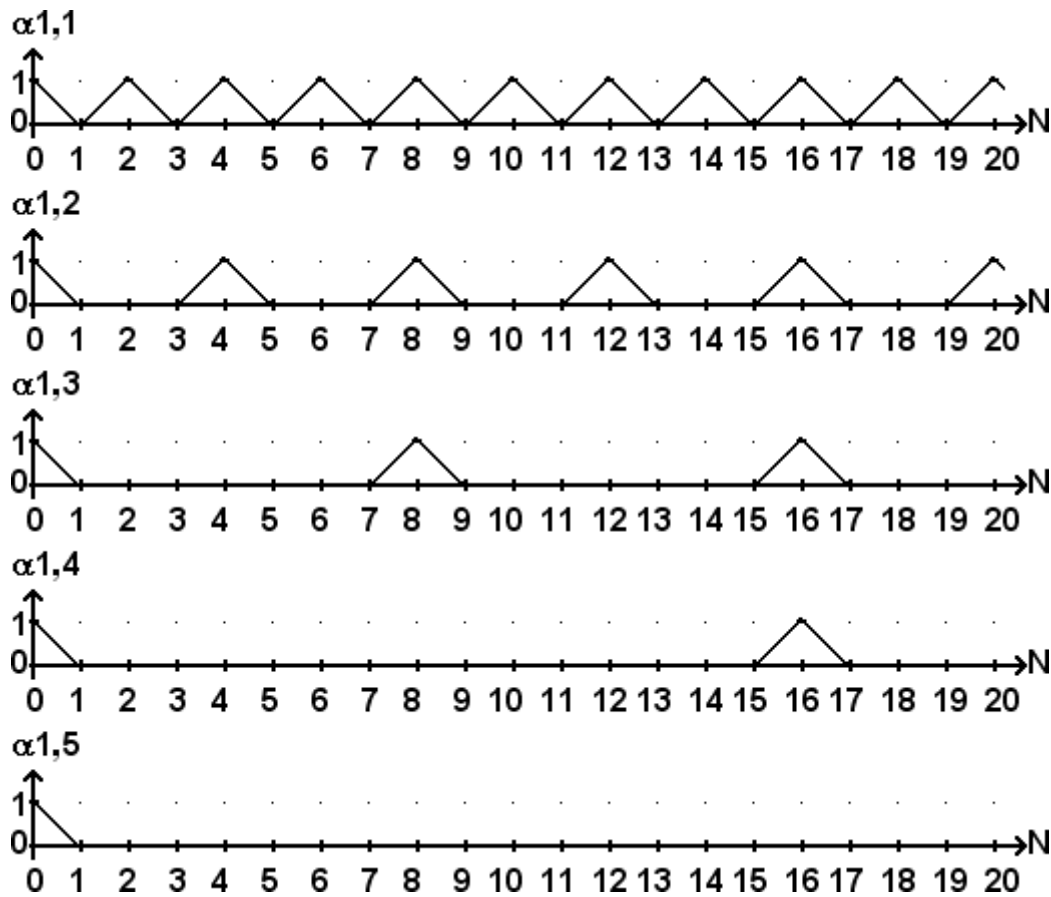
Notons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie est régulière et que :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_1 - 1$
 Pour S_a , on a $R_a = P_1^a - 1$

Pour comprendre que la "courbe" α_1 est régulière, nous devons garder à l'esprit qu'elle dépend directement de N . Car dans le cas de cette courbe, P_1 voit logiquement sa puissance α_1 s'annuler lorsque N est impaire (c'est-à-dire lorsque N n'est pas multiple de 2) : c'est-à-dire une fois sur 2. Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres paires restant, nous avons

ceux qui sont multiples de 2^1 , ceux multiples de 2^2 , ceux multiples de 2^3 , ...
ceux multiples de $P_1^{\alpha_1}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_1 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme un somme de courbes $\alpha_{1,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie.

Nous avons donc :

$$\alpha_1 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{1,x})$$

Nous devons prendre en compte le caractère périodique de chaque $\alpha_{1,x}$ pour la construction de leur courbe. les fonctions recherchées devront donc refléter cette périodicité. De plus, nous devons avoir $\alpha_{1,x} = 1$ pour $N = 0$. Nous sommes dans le cas de la fonction *SINUS*. De plus $\alpha_{1,x}$ n'admettant pas de valeur négative mais seulement les valeurs 0 et 1, nous devons élever cette fonction au carré. De là, nous déduisons facilement $\alpha_{1,1}$. Pour les courbes suivantes, nous devons simplement trouver le moyen d'avoir une fonction nulle pour certaines valeurs de N réparties régulièrement, ce que permettent les fonctions polynômiales lorsqu'elles sont associées à la fonction *SINUS*. Nous devons finalement diviser ce polynôme $P(N)$ par une fonction qui nous permette d'avoir la valeur $\alpha_{1,x} = 1$ au moins tous les 2^x pour N . c'est-à-dire que la fonction *SINUS* élevée au carré doit valoir 1, ou encore :

$$\sin^2 \left(\frac{P(N) \cdot \pi}{d(N)} \right) = 1 \text{ (avec } d(N) \text{ le dénominateur).}$$

Pour qu'un polynôme $P(N)$ s'annule uniquement pour 1, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)$.

Pour que ce polynôme s'annule seulement pour 1 et pour 2, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)(N - 2)$.

Pour qu'il s'annule seulement pour 1, pour 2 et pour 3, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)(N - 2)(N - 3)$.

Pour qu'il s'annule seulement pour 1, pour 2, pour 3, ... et pour $y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)(N - 2)(N - 3) \dots (N - y)$.

En admettant que $N = 0$ pour chacune de ces lignes précédentes, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur.

Avec pour $\alpha_{1,x}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1).\pi}{2} \right) \\ \alpha_{1,2} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3).\pi}{4} \right) \\ \alpha_{1,3} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)(N-7).\pi}{32} \right) \\ \alpha_{1,4} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2) \dots (N-14)(N-15).\pi}{4096} \right) \\ \alpha_{1,5} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2) \dots (N-30)(N-31).\pi}{134217728} \right) \\ &\dots\end{aligned}$$

Il y a un lien direct entre le numérateur et le dénominateur car il n'est pas utile que ce dénominateur soit autre chose qu'une puissance de 2 (il suffit de faire référence à la trigonométrie). En effet, le numérateur faisant intervenir N , il sera composé en puissance de 2, on le remarque aisément en remplaçant N par 0 (pour des raisons pratiques ne gênant pas la suite du raisonnement, notons que cela fonctionne avec tout autre entier positif). Le dénominateur doit alors obligatoirement aussi être composé en puissance de 2 (au moins) mais seulement d'une unité supérieure, ceci afin de permettre la validité des courbes.

De plus, en comparant les " $\alpha_{1,x}$ ", nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance (de 2) dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 2; 5; 12; 27; 58; ... Or :

$$\begin{aligned}
 1 &= 2^1 - 1 \\
 2 &= 2^2 - 2 \\
 5 &= 2^3 - 3 \\
 12 &= 2^4 - 4 \\
 27 &= 2^5 - 5 \\
 58 &= 2^6 - 6 \\
 &\dots \\
 \dots &= 2^x - x
 \end{aligned}$$

D'où :

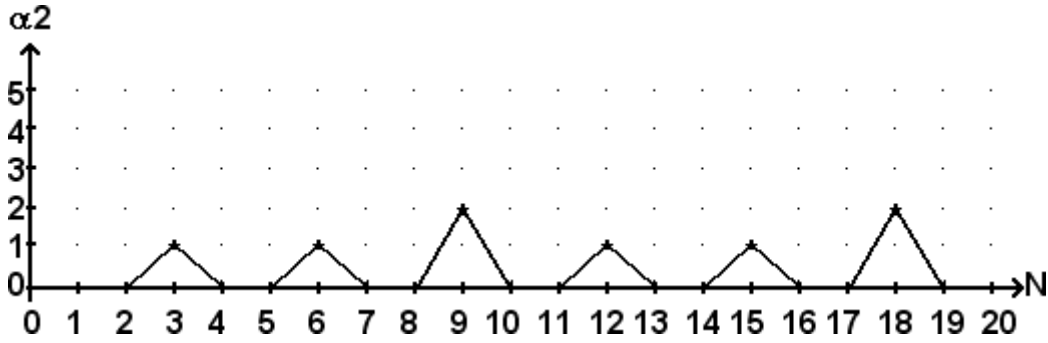
$$\alpha_{1,x} = \sin^2 \left(\pi \cdot \frac{\prod_{h=1}^{h=(2^x-1)} (N-h)}{2^{(2^x-x)}} \right)$$

Et voici donc la formule de la puissance α_1 pour P_1 :

$$\alpha_1 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\pi \cdot \frac{\prod_{h=1}^{h=(2^x-1)} (N-h)}{2^{(2^x-x)}} \right)$$

1.2 Etude de la puissance de 3

Colonne α_2 , correspondant à $P_2 = 3$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 3 (c'est-à-dire P_2) grâce à la courbe de α_2 .

De la même manière, des symétries apparaissent régulièrement :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 3$ de Longueur $L_1 = 4$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_2 en $N = 9$ de Longueur $L_2 = 16$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_3 en $N = 27$ de Longueur $L_3 = 52$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_4 en $N = 81$ de Longueur $L_4 = 160$ sur l'axe N ;
 ...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_2)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_2)^a - 2$ sur l'axe N .

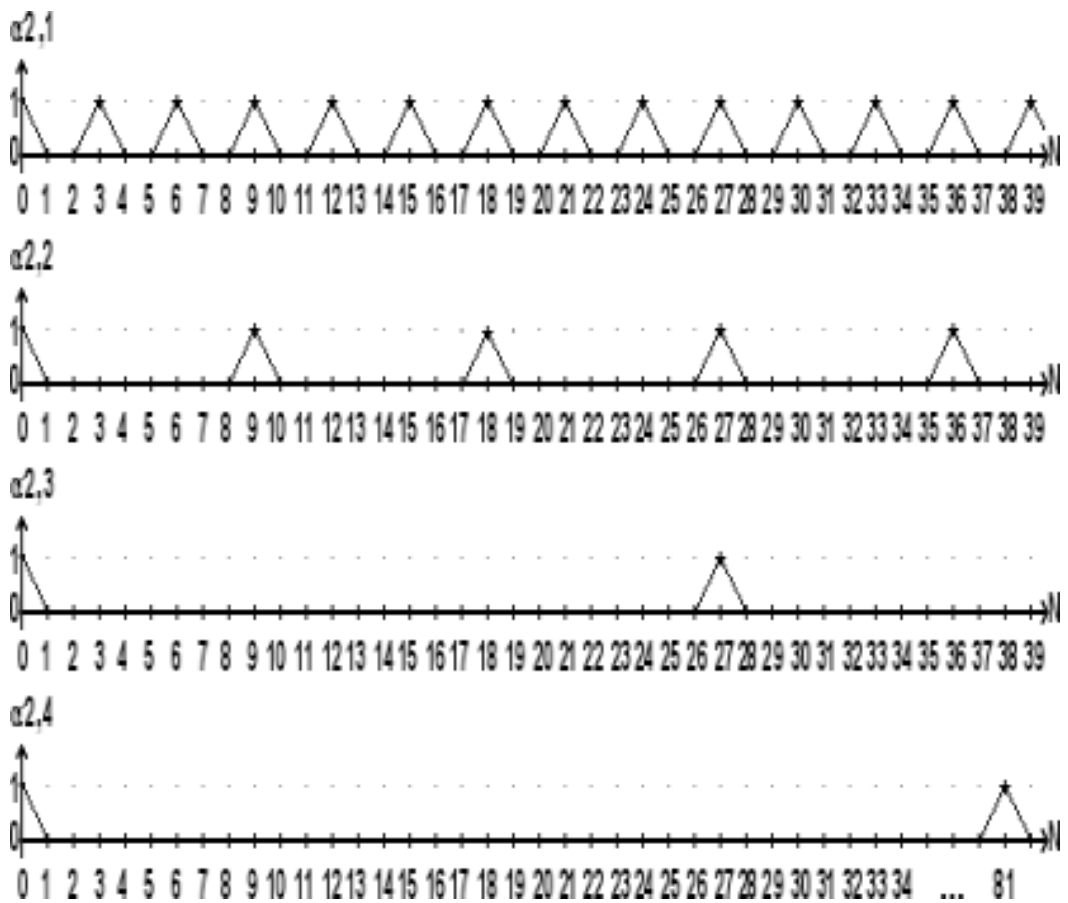
Notons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie est régulière et que :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_2 - 1$
 Pour S_a , on a $R_a = P_2^a - 1$

Pour les mêmes raisons que la courbe α_1 , α_2 est régulière car elle aussi dépend directement de N . En effet, dans le cas de cette courbe, P_2 voit logiquement sa puissance α_2 s'annuler lorsque N n'est pas multiple de 3 : c'est-à-dire une fois sur 3.

Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres restants, nous avons ceux qui sont multiples de 3^1 , ceux multiples de 3^2 , ceux multiples de 3^3 , ... ceux multiples de $P_2^{\alpha_2}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_2 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme un somme de courbes $\alpha_{2,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_2 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{2,x})$$

De la même manière que pour les courbes de $\alpha_{1,x}$, nous utiliserons les mêmes fonctions utiles à la construction des courbes $\alpha_{2,x}$: c'est-à-dire les fonctions \sin^2 , les polynômes $(N-1)(N-2)\dots(N-y)$, et un dénominateur $d(N)$ qui devra être nécessairement composé en puissance de 3.

Comme pour les courbes de $\alpha_{1,x}$, en admettant que $N = 0$, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur. En cela, la méthode est la même que précédemment. Mais la différence avec les courbes de $\alpha_{1,x}$ apparaît ici et pour la suite de l'étude car nous devrons ensuite encore diviser l'ensemble par une valeur précise pour que la formule finale $\alpha_{2,x}$ puisse prendre 1 pour valeur lorsque N est un multiple de 3.

Avec pour $\alpha_{2,x}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{2,1} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2).\pi/3]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,2} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-7)(N-8).\pi/3^3]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,3} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-25)(N-26).\pi/3^{11}]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,4} &= \frac{\sin^2[(N-1)\dots(N-80).\pi/3^{37}]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,5} &= \frac{\sin^2[(N-1)\dots(N-242).\pi/3^{117}]}{\sin^2(\pi/3)} \\ &\dots\end{aligned}$$

ATTENTION : Il est important de remarquer que cette règle n'est valable que pour un nombre premier (ici, il s'agit de 3), car nous désirons construire ce dénominateur $d(N)$ de telle sorte qu'il "compte" le nombre concernant la puissance de 3 qui résulte du calcul du polynôme au numérateur. Clairement, nous souhaitons obtenir au dénominateur une puissance de 3 qui soit d'une unité supérieur à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Poursuivons en comparant les " $\alpha_{2,x}$ ", nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 3; 11; 37; 117; ... Or :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{3^1 - 1}{3 - 1} - 1 + 1 \\
 3 &= \frac{3^2 - 1}{3 - 1} - 2 + 1 \\
 11 &= \frac{3^3 - 1}{3 - 1} - 3 + 1 \\
 37 &= \frac{3^4 - 1}{3 - 1} - 4 + 1 \\
 117 &= \frac{3^5 - 1}{3 - 1} - 5 + 1 \\
 \dots & \\
 \dots &= \frac{3^x - 1}{3 - 1} - x + 1
 \end{aligned}$$

D'où :

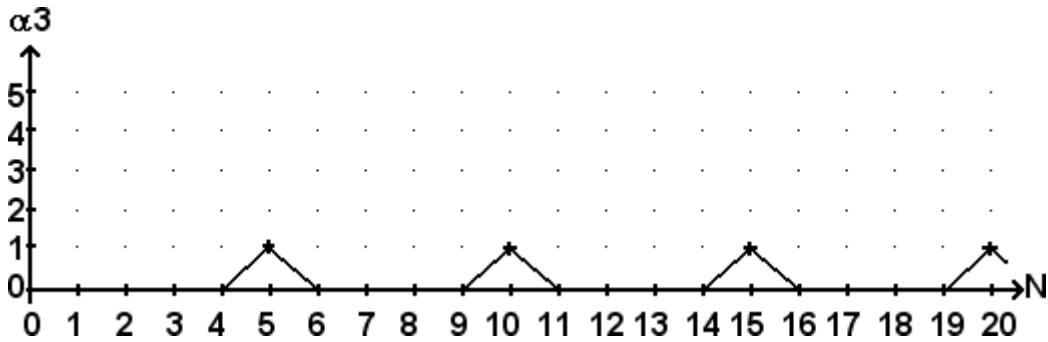
$$\alpha_{2,x} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(3^x-1)} (N-h)}{3^{\left(\frac{3^x-1}{3-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/3)}$$

Et voici donc la formule de la puissance α_2 pour P_2 :

$$\alpha_2 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(3^x-1)} (N-h)}{3^{\left(\frac{3^x-1}{3-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/3)}$$

1.3 Etude de la puissance de 5

Colonne α_3 , correspondant à $P_3 = 5$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 5 (c'est-à-dire P_3) grâce à la courbe de α_3 .

Nous constatons aussi :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 5$ de Longueur $L_1 = 8$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_2 en $N = 25$ de Longueur $L_2 = 48$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_3 en $N = 125$ de Longueur $L_3 = 248$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_4 en $N = 625$ de Longueur $L_4 = 1248$ sur l'axe N ;
 ...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_3)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_3)^a - 2$ sur l'axe N .

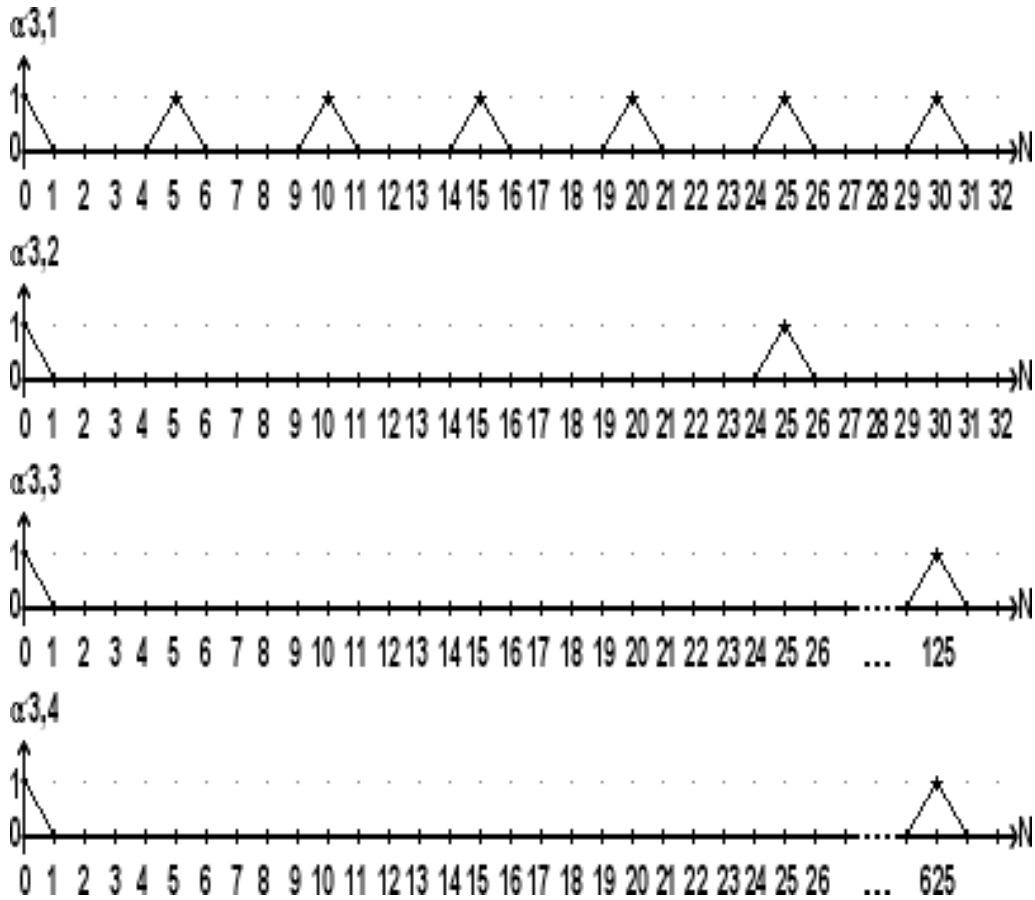
Remarquons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_3 - 1$
 Pour S_a , on a $R_a = P_3^a - 1$

Pour les mêmes raisons que la courbe α_1 , α_3 est régulière car elle aussi dépend directement de N . En effet, dans le cas de cette courbe, P_3 voit logiquement sa puissance α_3 s'annuler lorsque N n'est pas multiple de 5 : c'est-à-dire une fois sur 5.

Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres restants, nous avons ceux qui sont multiples de 5^1 , ceux multiples de 5^2 , ceux multiples de 5^3 , ... ceux multiples de $P_3^{\alpha_3}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_3 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme un somme de courbes $\alpha_{3,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_3 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{3,x})$$

De la même manière que pour les courbes de $\alpha_{2,x}$, nous utiliserons les mêmes fonctions utiles à la construction des courbes $\alpha_{3,x}$: c'est-à-dire les fonctions \sin^2 , les polynômes $(N-1)(N-2)\dots(N-y)$, et un dénominateur $d(N)$ qui devra être nécessairement composé en puissance de 5.

Comme pour les courbes de $\alpha_{2,x}$, en admettant que $N = 0$, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur. En cela, la méthode est la même que précédemment. Et comme pour les courbes de $\alpha_{2,x}$, nous devons ensuite encore diviser l'ensemble par une valeur précise pour que la formule finale $\alpha_{3,x}$ puisse prendre 1 pour valeur lorsque N est un multiple de 5.

Avec pour $\alpha_{3,x}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{3,1} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)(N-3)(N-4).\pi/5]}{\sin^2(\pi/5)} \\ \alpha_{3,2} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-23)(N-24).\pi/5^5]}{\sin^2(\pi/5)} \\ \alpha_{3,3} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-123)(N-125).\pi/5^{29}]}{\sin^2(\pi/5)} \\ \alpha_{3,4} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-623)(N-624).\pi/5^{153}]}{\sin^2(\pi/5)} \\ \alpha_{3,5} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-3124)(N-3125).\pi/5^{777}]}{\sin^2(\pi/5)} \\ &\dots\end{aligned}$$

ATTENTION : Il est important de remarquer que cette règle n'est valable que pour un nombre premier ici aussi (il s'agit de 5), car nous désirons construire ce dénominateur $d(N)$ de telle sorte qu'il "compte" le nombre concernant la puissance de 5 qui résulte du calcul du polynôme au numérateur. Clairement, nous souhaitons obtenir au dénominateur une puissance de 5 qui soit d'une unité supérieur à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Poursuivons en comparant les " $\alpha_{3,x}$ ", nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 5; 29; 153; 777; ... Or :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{5^1 - 1}{5 - 1} - 1 + 1 \\
 5 &= \frac{5^2 - 1}{5 - 1} - 2 + 1 \\
 29 &= \frac{5^3 - 1}{5 - 1} - 3 + 1 \\
 153 &= \frac{5^4 - 1}{5 - 1} - 4 + 1 \\
 777 &= \frac{5^5 - 1}{5 - 1} - 5 + 1 \\
 \dots & \\
 \dots &= \frac{5^x - 1}{5 - 1} - x + 1
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\alpha_{3,x} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(5^x-1)} (N-h)}{5^{\left(\frac{5^x-1}{5-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/5)}$$

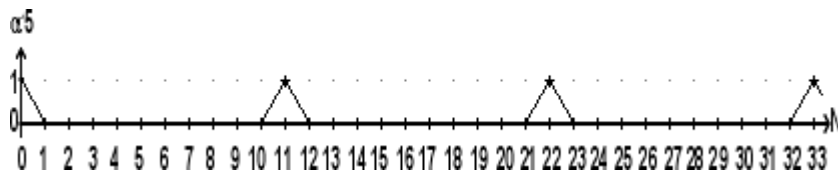
Et voici donc la formule de la puissance α_3 pour P_3 :

$$\alpha_3 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(5^x-1)} (N-h)}{5^{\left(\frac{5^x-1}{5-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/5)}$$

1.4 Etude de la puissance de 11

Colonne α_5 , correspondant à $P_5 = 11$.

Dorénavant, comme nous allons le voir, la manière de rédiger les formules est identique à partir de α_3 jusqu'à α_n . Mais prenons encore un exemple avec α_5 avant la généralisation (les explications seront plus brèves pour α_5).

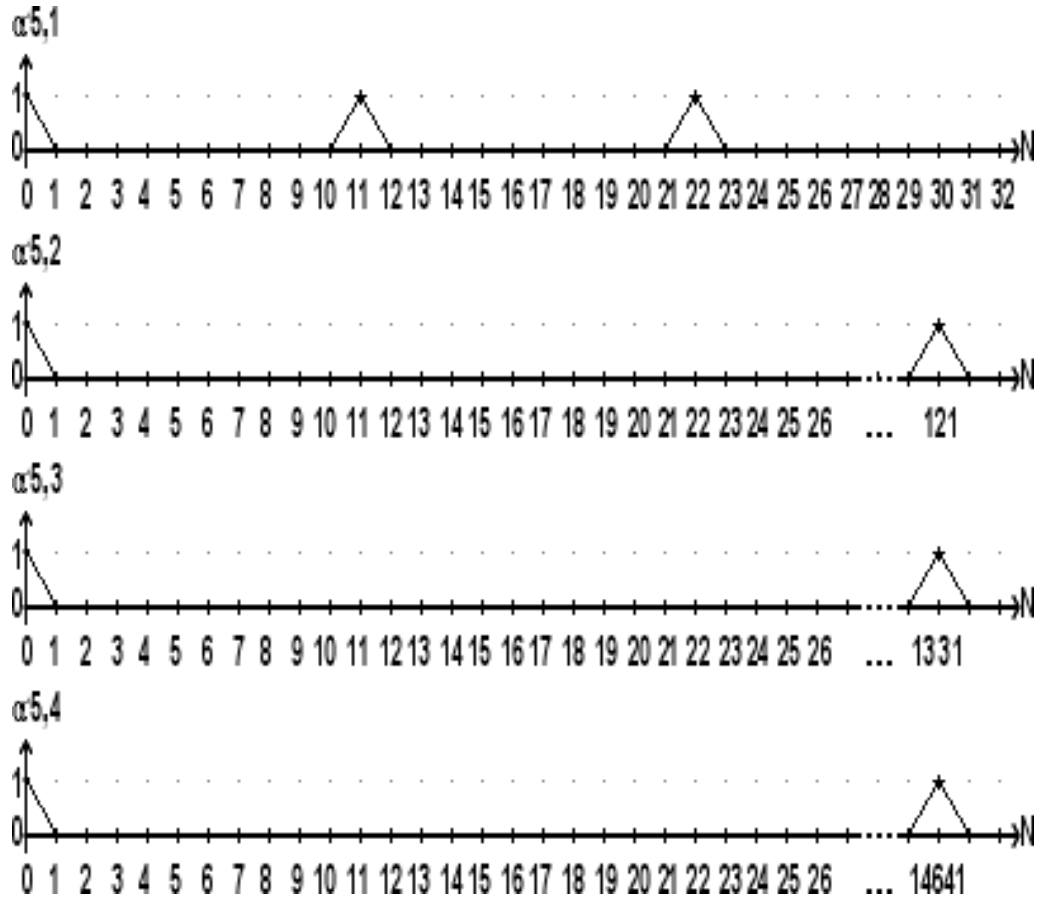


Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 11 (c'est-à-dire P_5) grâce à la courbe de α_5 .

Pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$: une Symétrie verticale S_a en $N = (P_5)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_5)^a - 2$ sur l'axe N .

α_5 est régulière car elle dépend directement de N . α_5 est composée de la somme d'une infinité de courbes plus simples que nous noterons $\alpha_{5,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :

(voir page suivante)



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_5 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{5,x})$$

Avec pour $\alpha_{5,x}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{5,1} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-10).\pi/11]}{\sin^2(\pi/11)} \\ \alpha_{5,2} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-120).\pi/11^{11}]}{\sin^2(\pi/11)} \\ \alpha_{5,3} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-1330).\pi/11^{131}]}{\sin^2(\pi/11)} \\ \alpha_{5,4} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\dots(N-14640).\pi/11^{1461}]}{\sin^2(\pi/11)} \\ &\dots \end{aligned}$$

ATTENTION : Cette règle n'est valable que pour un nombre premier (ici, il s'agit de 11). Nous souhaitons toujours obtenir au dénominateur une puissance de 11 qui soit d'une unité supérieur à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 11; 131; 1461; ... Or :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{11^1 - 1}{11 - 1} - 1 + 1 \\ 11 &= \frac{11^2 - 1}{11 - 1} - 2 + 1 \\ 131 &= \frac{11^3 - 1}{11 - 1} - 3 + 1 \\ 1461 &= \frac{11^4 - 1}{11 - 1} - 4 + 1 \\ \dots & \\ \dots &= \frac{11^x - 1}{11 - 1} - x + 1 \end{aligned}$$

Ce qui, au passage, nous permet de prédire la prochaine valeur du dénominateur $d(N)$ pour $\alpha_{5,5}$ (ainsi que toutes les valeurs suivantes) :

$$16101 = \frac{11^5 - 1}{11 - 1} - 5 + 1$$

D'où :

$$\alpha_5 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(11^x-1)} (N-h)}{11^{\left(\frac{11^x-1}{11-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/11)}$$

1.5 Etude de la puissance de P_n

Colonne α_p , correspondant à P_n .

Nous avons une Symétrie verticale S_a en $N = (P_n)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_n)^a - 2$ sur l'axe N .

Avec un nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_n - 1$
 Pour S_a , on a $R_a = P_n^a - 1$

α_p est régulière (comme précédement) car elle dépend directement de N . α_p est composée de la somme d'une infinité de "courbes" plus simples que nous noterons $\alpha_{p,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :

$$\alpha_p = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)}{P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/P_n)}$$

Après vérification, nous pouvons aisément constater que cette formule inclu également α_1 (pour $P_1 = 2$), ce qui est intéressant si nous nous donnons pour objectif de généraliser.

Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous regroupons tous les multiples de P_n grâce à ce système de "courbes" de α_n . Ainsi, le calcul entre le dénominateur et le numérateur dans le " \sin^2 " permet d'obtenir exclusivement :

- Un nombre rationnel multiplié par π sous la forme $2c.\pi/P_n$ (avec $c \in \mathbb{N}$) pour les nombres premiers impaires, de telle sorte que $(2c \pm 1).\pi/P_n = d.\pi$ (avec $d \in \mathbb{N}$), et donc un nombre rationnel multiplié par π sous la forme :

$$(d.P_n \pm 1).\pi/(2.P_n) \text{ ce qui permet } \alpha_p = 1.$$

Et aussi un nombre rationnel multiplié par π sous la forme $(2c+1).\pi/2$ (avec $c \in \mathbb{N}$) pour $P_1 = 2$ qui est le seul nombre premier paire.

Ou bien

- Un nombre entier multiplié par π et donc directement $\alpha_p = 0$, sauf pour le cas où P_n n'est pas connu et si nous le supposons égale à 4 : pour $x = 1$ (seulement), nous obtenons après calcul un nombre rationnel permettant $\alpha_p = 2$ pour tout N multiple de 4 alors que nous désirons avoir $\alpha_p = 0$ pour tout N dans ce cas (étant donné qu'en supposant $P_n = 4$ pour ce cas, 4 n'est pas un nombre premier). Nous allons donc aborder une étape supplémentaire pour résoudre ce problème.

1.6 Problème lorsque P_n est inconnu

Il est primordial de constater que la fonction α_p est construite de telle manière que la formule $d(N)$ du dénominateur ne se calcule qu'en fonction d'un nombre premier et non d'un autre nombre, c'est-à-dire que sans connaître ce nombre premier, nous pouvons maintenant remplacer P_n par un entier quelconque supérieur à 1, et obtenir un résultat très proche du résultat généralisé. Mais si nous nous arrêtons ici, nous rencontrons un problème si nous supposons que nous ne connaissons pas les nombres premiers dans le cas suivant :

Si nous supposons en particulier que $P_n = 4$, nous constaterions que les résultats obtenus seraient inexacts car la formule est incomplète. Effectivement, $\alpha_p = 2$ pour N multiple de 4. Nous devons donc construire une fonction qui nous permette de corriger ce problème. C'est-à-dire que nous devons construire une fonction $f(N)$ qui s'annule tous les multiples de 4 et qui vaut 1 sinon, ceci afin de ne pas perturber les résultats donnés par le reste de la formule, ce qui nous permettra de la multiplier à α_p :

$$\alpha_n = f(N) \cdot \alpha_p$$

Avec sur le même principe de construction que dans les parties précédentes (sachant que ce que nous recherchons est une fonction complémentaire à celle de la fonction *SINUS*) :

$$\alpha_n = \alpha_p \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot (P_n - 1)(P_n - 2)(P_n - 3) \right)$$

$$\alpha_n = \alpha_p \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v) \right)$$

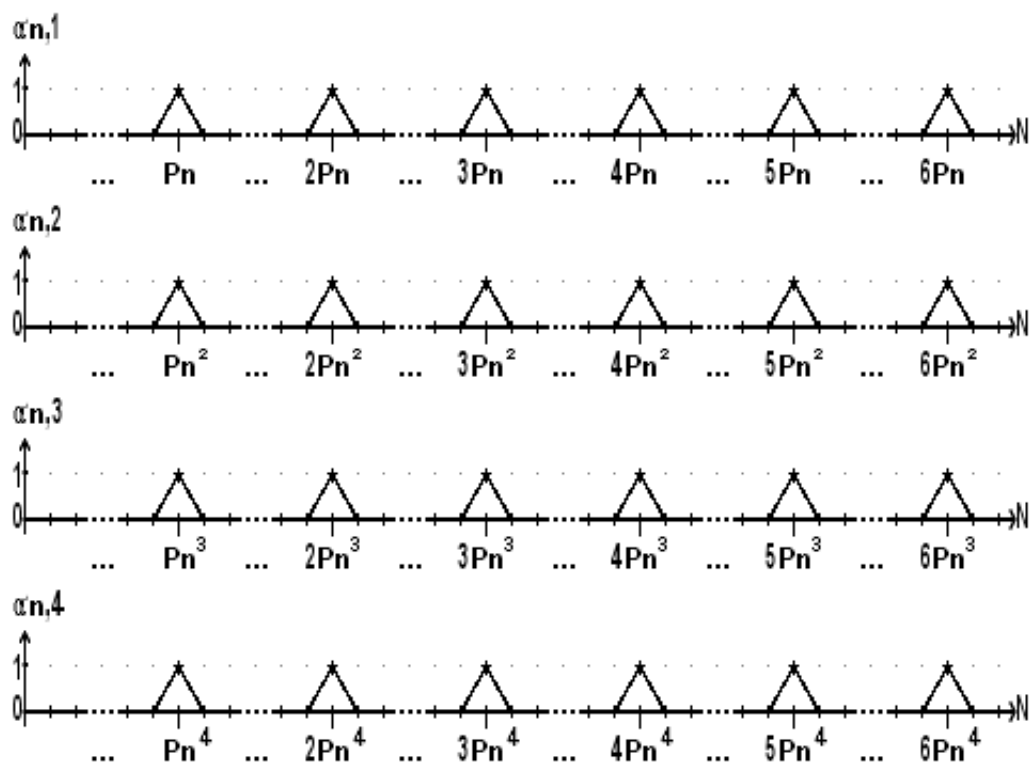
Ainsi, nous aurons construit la formule α_n permettant de donner les valeurs des puissances de chaque nombre premier P_n sans même avoir besoin de connaître P_n . En effet, cette formule ayant une valeur nulle dans le cas où nous prendrions pour P_n un autre nombre qu'un nombre premier, nous pouvons davantage la généraliser et remplacer P_n dans la formule α_n par $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. D'ailleurs, par la suite nous donnerons la formule de factorisation sous les 2 formes.

Précisons encore que M est bornée par $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ car la formule de α_p construite contenant l'expression $\sin^2(\pi/P_n)$ sous le "grand" dénominateur,

si P_n valait 1, le dénominateur vaudrait 0, or, la division par 0 est interdite. D'autre part, la construction de la fonction α_p n'est valable qu'à partir du nombre 2 étant donné que tout nombre élevé à une puissance supérieur à 1 vaut autre chose que ce nombre lui-même, ce qui n'est pas le cas pour le nombre 1. En effet, lorsqu'on élève le nombre 1 à une puissance quelconque supérieur 1, on obtient toujours 1. Cette formule ne peut donc pas le concerner.

Ceci exclu le nombre 1 de l'ensemble des nombres premiers de façon naturelle, c'est-à-dire sans supposition ni convention.

Evidemment, le nombre 0 est à exclure également des valeurs que peut prendre M étant donné que cela amènerait aussi à effectuer une division par 0.



Notons que depuis le début de l'utilisation de ce système graphique, $\alpha_{n,x}$ vaut 1 seulement pour les multiples d'un nombre premier, puis d'un nombre premier élevé au carré, puis d'un nombre premier élevé au cube, ... etc. Voici donc une formule qui révèle la mécanique des puissances pour la factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers.

- Brève explication sur le problème rencontré pour l'hypothèse de $P_n = 4$:

Pour $x = 1$, pour $P_n = 4$ et pour cette partie de la formule de α_n :

$$\frac{\prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)}{P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{4}$$

Or, lorsqu'on remplace (volontairement) N par 0, le résultat est un nombre rationnel pour cette partie de la formule. D'ailleurs, pour tout x entier, le résultat sera de la forme :

$$\frac{2^{a_1}.b_1}{4^{a_2}} \text{ avec } a_1, a_2, a_3 \text{ et } b_1 \in \mathbb{N} \text{ et } b_1 \text{ non multiple de } 2.$$

Ce qui revient à écrire, pour $a_2 = 1 + a_3$:

$$\frac{2^{a_1}.b_1}{4^{a_2}} = \frac{2^{(a_1-a_3)}.b_1}{2}$$

Où dans le cas de $x = 1$, nous avons $a_1 = a_3 = 1$, d'où il résulte un nombre rationnel de la forme $\frac{b}{2}$ permettant $\alpha_p = 2$ (alors que pour $x \geq 2$, nous avons $a_1 > a_3$, d'où il résulte un nombre entier permettant $\alpha_p = 0$). Il nous fallait donc une fonction complémentaire à la fonction “sin²” qui, multipliées entre elles valaient 0, précisément dans les cas recherchés.

ATTENTION :

Voir la partie “**2 démonstration complète**” (page 43) pour des explications approfondies.

1.7 Formule D(N) de factorisation d'un Nombre Entier

Rappelons que nous avons noté :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Or, nous connaissons maintenant α_n , et $f(N)$ nous permet de contourner le problème de P_n inconnu, nous pouvons donc déduire une formule pour N :

$$N = D(N) = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n) \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v) \right)}{\sin^2(\pi/P_n)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N - h)}{P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1} - x + 1\right)}} \right) \right]$$

(Attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des “valeurs absolues” , ni de ceux des “parties entières” : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses, ils contiennent α_n , c'est-à-dire la puissance de P_n).

Comme nous avons aussi noté (avec $M_i \in \mathbb{N}$, $M_i \geq 2$) :

$$N = \prod_{i=1}^{i \rightarrow +\infty} (M_i)^{a_i}$$

Or nous avons vu (rapidement) que la formule $D(N)$ pouvait s'appliquer pour tout entier $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ (voir “brève explication” précédemment, dans la partie “**1.6 Problème lorsque P_n est inconnu**” page 32, ou pour la démonstration dans la partie “**2 démonstration complète**” page 43).

Notons M_i cet entier M pour faire directement le lien avec cette dernière formule. Nous pouvons donc aussi déduire une autre formule équivalente mais “plus générale” pour N :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1} - x + 1\right)}} \right) \right]$$

Notons cette grande formule de Décomposition (ou factorisation) de N en produit de facteurs premiers $D(N)$, et appelons cette formule $D(N)$ la “Décomposée” de N :

$$N = D(N)$$

1.8 Simplifications possibles pour $D(N)$

- Restriction du nombre de termes du “grand produit” :

Pour éviter d’avoir à effectuer un calcul infini comme le suppose la formule de $D(N)$, remarquons que le nombre de termes “utiles” à la factorisation d’un nombre entier en nombres premiers est toujours fini. D’ailleurs, le plus grand de tous ces termes ne peut être plus grand que N lui-même. Mais si N est un nombre premier, alors le plus grand terme est au maximum égal à N . Notons :

$M_i \leq N$ ou (comme nous en venons d’en convenir) $M \leq N$

Nous pouvons ainsi borner le produit comme ceci :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M-v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}} \right) \right]$$

Remarquons que cette formule devient plus restrictive pour N puisqu’elle n’admet pas $N < 2$. En effet, cette formule induit de traiter les nombres N pour lesquels $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Ceci reste cohérent dans le sens où nous pouvons considérer que pour le cas de $N = 1$, il ne peut pas y avoir explicitement de nombre premier qui compose ce nombre.

Une borne ayant été donnée pour le “grand produit” \prod des termes associés à M , il nous reste à borner la “grande somme” \sum des termes de “sin²”, ce qui va être plus délicat. En effet, pour remplacer cet “infini”, nous allons rechercher une formule de Restriction R_n pour x nous permettant de limiter les calculs aux calculs utiles, ou en tout cas, à moins de calculs inutiles.

- Recherche d'une formule de Restriction R_n pour la "grande somme":

Pour un nombre entier $N \geq 2$, nous souhaiterions restreindre la grande somme \sum des termes de " \sin^2 " à la puissance maximale qui sera utile pour l'ensemble des nombres premiers concernés par le calcul. Rappelons que cette grande somme sert à "calculer" la puissance d'un nombre premier de la factorisation de N .

Etudions cette formule par le biais d'un tableau, par exemple pour $P_1 = 2$:

N	$\alpha_1(\text{réel})$	$\alpha'_1(\text{recherché})$
1	0	0
2	1	1
3	0	1
4	2	2
5	0	2
6	1	2
7	0	2
8	3	3
9	0	3
10	1	3
11	0	3
12	2	3
13	0	3
14	1	3
15	0	3
16	4	4
17	0	4

Pour les valeurs de N en rouge :

$$N = (P_1)^j \text{ (avec } j \in \mathbb{N})$$

$$\text{Donc } j = \frac{\ln N}{\ln P_1}$$

Nous aimerions borner j à α'_1 .

Dans tous les cas de P_n , nous souhaitons avoir :

$$R_n = 0 \quad \text{pour} \quad (P_n)^0$$

$$R_n = 1 \quad \text{pour} \quad (P_n)^1$$

$$R_n = 2 \quad \text{pour} \quad (P_n)^2$$

$$R_n = 3 \quad \text{pour} \quad (P_n)^3$$

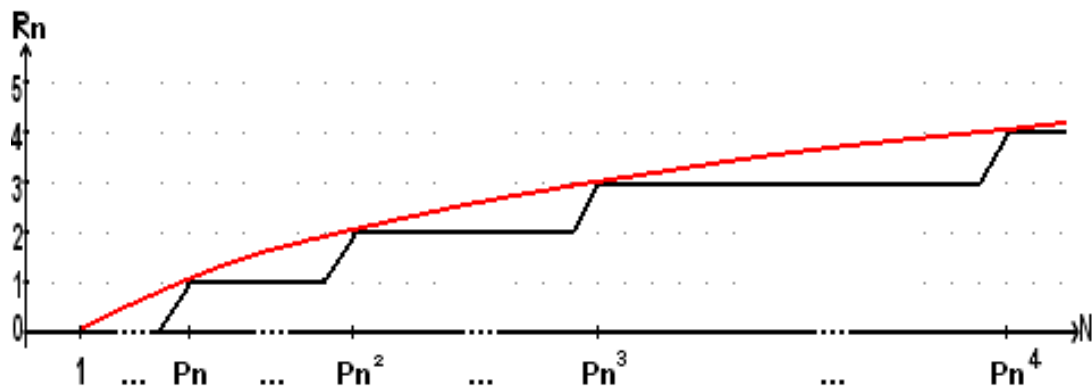
...

$$R_n = j \quad \text{pour} \quad (P_n)^j$$

Pour $N = (P_n)^j$

$$j = \frac{\ln N}{\ln P_n}$$

Représentation graphique de la formule R_n recherchée :



▷ La courbe noire est celle de $R_n = j$, la formule de restriction recherchée.

▷ La courbe rouge est celle de $j = \frac{\ln N}{\ln P_n}$

Cependant il est possible de donner un encadrement :

$$\text{Pour } N \in [(P_n)^j; (P_n)^{(j+1)} - 1]$$

$$\Rightarrow R_n = j$$

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M-v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}} \right) \right]$$

Mais cette borne n'étant pas pleinement satisfaisante (car elle sous-entend de connaître déjà les nombres premiers), il serait de loin préférable de construire de manière exacte la fonction R_n recherchée (en noire sur le graphique). Pour cela, nous devons faire appel à d'autres fonctions dont l'étude est faite en partie "**3 Formules Courtes**" page 139 (notamment une fonction d'Impulsion Première \mathfrak{J} , définie en page 146) , afin de donner la fonction R_n dans la sous-partie "**3.6 Formule de restriction $RM(N)$** " (page 158). Nous ne reviendrons donc pas sur cette étude, nous nous contenterons maintenant de donner cette fonction pour finaliser la formule. Comme il est nécessaire de comprendre les démonstrations qui suivront cette partie pour comprendre cette fonction de restriction, il serait plus judicieux de poursuivre et de ne pas tenir rigueur (pour l'instant) du manque d'explications.

En notant la grande formule $D(N)$ ainsi :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\alpha_M}$$

Notons $RM(N)$ la fonction de restriction en fonction du nombre M (toujours dans l'hypothèse où le " $n^{ième}$ " nombre premier n'est pas connu, et où l'on remplace P_n dans la formule an par M , ce qui nous donne la formule α_M).

Avec \mathfrak{I} la fonction d'Impulsion Première définie d'après l'étude consacrée à $RM(N)$, nous avons :

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=a} \left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N - k) \right] \right\}$$

Où les calculs ne sont plus nécessaires (pour des valeurs de a croissantes) dès que :

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N - k) \right] = 0$$

Ce qui sous-entend finalement que les calculs ne sont plus nécessaires dès que N est une des valeurs entières de l'intervalle $[0; M^a - 1]$

Plus précisément, si nous avons :

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=M^{a+1}-1} (N - k) \right] = 0$$

Et

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1} (N - k) \right] = 1$$

Alors, la borne supérieur de x dans la formule de α_M vaut $x = a$.

Grâce à la fonction $RM(N)$, nous pouvons limiter les calculs inutiles, sans pour autant les éviter complètement.

2

Démonstration complète

Dorénavant, certaines lettres qui vont être utilisées seront les mêmes que précédemment, mais elles n'auront pas de lien entre elles (exemple pour les variables comme a , comme b , comme c , comme d ou comme k ...). Nous préciserons ce changement par une redéfinition des variables concernées.

2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre

Cette grande formule $D(N)$ de factorisation d'un entier en produit de nombres premiers peut être vue comme un ensemble regroupant plusieurs "fonctions" ayant chacune une "tâche" précise à effectuer. C'est justement ce que nous allons expliquer.

Tout d'abord, si nous reprenons la formule de α_n et que nous la réécrivons sous cette forme :

$$\alpha_n = A.Cc. \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2 \left(\frac{\pi.F_p}{P_n.F_c} \right)$$

- Avec $F_p = \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)$

F_p est la fonction qui permet à l'ensemble "sin²" de s'annuler de manière cyclique. F_p permet d'annuler cet ensemble lorsque le nombre de fois où elle est divisible par P_n est supérieur ou égale à F_c .

- Avec $F_c = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1$

F_c est la fonction qui permet de “calculer” la divisibilité de P_n sur $[0; P_n^x]$ (les facteurs de P_n dans les multiples de P_n que l’on retrouve dans le calcul de F_p).

▷ Ainsi, le calcul de $\sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{P_n^{F_c}}\right)$ permet d’obtenir soit 0 (notamment lorsque N n’est pas divisible par P_n), soit un nombre de la forme $\sin^2(\pi.\varepsilon/P_n)$ (avec $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et non divisible par P_n).

- Avec $Cc = \frac{1}{\sin^2(\pi/P_n)}$

Cc est la fonction Coefficient Correcteur qui va permettre à α_n de valoir un nombre entier. En effet, $\sin^2(\pi.\varepsilon/P_n)$ (comme précédemment avec $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et non divisible par P_n) a la même valeur que $\sin^2(\pi/P_n)$.

▷ Ainsi, le calcul de $\sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{P_n^{F_c}}\right)$ permet d’obtenir soit 0 (lorsque N n’est pas divisible par P_n), soit 1 (lorsque N est divisible par P_n). Ajoutons que si nous remplaçons P_n par un autre nombre entier qui n’est pas un nombre premier, le calcul permet aussi d’obtenir 0 (sauf pour $P_n = 4$ à ce stade du développement).

- Avec $A = \cos^2[(P_n - 1)(P_n - 2)(P_n - 3).\pi/4]$

A est la fonction qui permet d’éliminer le défaut lorsque P_n est inconnu et qu’on le suppose égale à 4 (défaut pour $x = 1$ uniquement).

- Avec $R_n = j$ Pour $N \in [(P_n)^j; (P_n)^{j+1} - 1]$

R_n est la fonction de Restriction permettant de limiter les calculs aux nombres premiers $P_n \leq N$.

▷ Ainsi, si N est divisible par P_n , la formule α_n donne le nombre de divisibilité(s) par P_n sous la forme d’une puissance de P_n .

2.2 Démonstration complète

Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, N se décompose en produit de nombres premiers $P_n \in \mathbb{P}$ tel que :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

N ainsi défini contient nécessairement au moins un terme étant un nombre premier P_n . Supposons que P_n ne soit pas connu. Nous désirons savoir quelle est la “progression” de la puissance de α_n pour N .

Evidemment, nous savons déjà que $\alpha_n = 0$ pour N non multiple de P_n . α_n prend une valeur entière si et seulement si N est multiple de P_n , c’est-à-dire si :

$N = t.P_n$ (avec $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ car 1 n’est pas un nombre premier, par convention).

Par exemple, si $t = P_n$ alors $N = (P_n)^2$ et donc $\alpha_n = 2$.

Tableau de référence *T.R.2* :

(voir page suivante)

T.R.2

N	α_n
1	0
2	0
3	0
...	...
$P_n - 1$	0
P_n	1
$P_n + 1$	0
...	...
$2.P_n - 1$	0
$2.P_n$	1
$2.P_n + 1$	0
...	...
$P_n^2 - 1$	0
P_n^2	2
$P_n^2 + 1$	0
...	...
$P_n^2 + 2.P_n - 1$	0
$P_n^2 + 2.P_n = P_n.(P_n + 2)$	1
$P_n^2 + 2.P_n + 1$	0
...	...
$2.P_n^2 - 1$	0
$2.P_n^2$	2
$2.P_n^2 + 1$	0
...	...
$2.P_n^2 + P_n - 1$	0
$2.P_n^2 + P_n = P_n(2P_n + 1)$	1
$2.P_n^2 + P_n + 1$	0
...	...
$P_n^3 - 1$	0
P_n^3	3
$P_n^3 + 1$	0
...	...
$2.P_n^{\alpha_n} - P_n - 1$	0
$2.P_n^{\alpha_n} - P_n = P_n(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1)$	1
$2.P_n^{\alpha_n} - P_n + 1$	0
...	...
$2.P_n^{\alpha_n} - 1$	0
$2.P_n^{\alpha_n}$	α_n
$2.P_n^{\alpha_n} + 1$	0
...	...
$2.P_n^{\alpha_n} + P_n - 1$	0
$2.P_n^{\alpha_n} + P_n$	1
$2.P_n^{\alpha_n} + P_n + 1$	0
...	...

L'objectif est de trouver une formule qui permette d'obtenir α_n en fonction de N .

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que 1 n'est pas un nombre premier (par convention), nous avons :

$$P_n > (P_n - 1) \geq 1.$$

Aucun des nombres sur l'intervalle $[1; P_n - 1]$ n'est divisible par P_n .

2.2.1 Remarques préalables sur le tableau de référence T.R.2

▷ Règle n°1 :

Nous pouvons relever ceci :

- Sur l'intervalle $]0; P_n[$:
Il n'existe aucun multiple de P_n .
- Sur l'intervalle $]0; P_n^2[$:
Il existe $(P_n - 1)$ multiple(s) de P_n .
En effet, le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n - 1).P_n$.
De plus chaque multiple de P_n est réparti régulièrement : l'écart entre 2 multiples de P_n consécutifs vaut P_n .
- Sur l'intervalle $]0; P_n^3[$:
Il existe $(P_n^2 - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n - 1)$ sont multiples de P_n^2 .
En effet, le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n^2 - 1).P_n$
et le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n - 1).P_n^2$.
De plus chaque multiple de P_n est réparti régulièrement : l'écart entre 2 multiples de P_n consécutifs vaut P_n . De même, pour chaque multiple de P_n^2 , leur répartition est régulière : l'écart entre 2 multiples de P_n^2 consécutifs vaut P_n^2 (le raisonnement étant le même pour la suite, il est inutile de le réécrire à chaque fois).
- Sur l'intervalle $]0; P_n^4[$:
Il existe $(P_n^3 - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de P_n^3 .

- Sur l'intervalle $]0; P_n^5[$:

Il existe $(P_n^4 - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^3 - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de P_n^3 ,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de P_n^4 .

...

- Sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}[$:

Il existe $(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^{(\alpha_n-2)} - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
dont $(P_n^{(\alpha_n-3)} - 1)$ sont multiples de P_n^3 ,

...

dont $(P_n^3 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(\alpha_n-3)}$,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(\alpha_n-2)}$,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de $P_n^{(\alpha_n-1)}$.

- De manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq (\alpha_n - 1)$:

Sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}[$, qui peut encore s'écrire $[1; P_n^{\alpha_n} - 1]$:

Il existe $(P_n^{(\alpha_n-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$,

dont la répartition de chaque multiples de $P_n^{(k+1)}$ est régulière puisque l'écart entre 2 de ces multiples vaut $P_n^{(k+1)}$.

▷ **Règle n° 2 :**

par construction nous obtenons ce qui suit :

Soit $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$, nous avons $(t - 1).P_n$ est multiple de P_n .

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1).P_n; t.P_n[$$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1).P_n^2; t.P_n^2[$$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1).P_n^3; t.P_n^3[$$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1).P_n^4; t.P_n^4[$$

...

De manière générale, il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1).P_n^{\alpha_n}; t.P_n^{\alpha_n}[\text{ qui peut encore s'écrire } [(t - 1).P_n^{\alpha_n} + 1; t.P_n^{\alpha_n} - 1]$$

Ces multiples sont répartis de manière “symétrique” dans le sens où l’écart entre 2 multiples consécutifs vaut P_n . Ceci donne à α_n des symétries qui sont localisables sur ces intervalles. En effet, sur cet intervalle, le nombre de multiples de P_n se déduit ainsi :

(la longueur de l’intervalle est équivalente à la différence de ses 2 bornes)

$$\begin{aligned}(t.P_n^{\alpha_n} - 1) - [(t - 1).P_n^{\alpha_n} + 1] &= P_n^{\alpha_n} - 2 \\ &= P_n^{\alpha_n} - P_n + P_n - 2 \\ &= P_n.(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1) + (P_n - 2)\end{aligned}$$

Le plus petit nombre premier étant $P_n = 2$, les relations précédentes et suivantes sont donc valables pour tout P_n .

(factorisation également valable pour toutes les puissances de P_n intermédiaires possibles jusqu’à ceci)

$$= P_n^{\alpha_n-1}.(P_n - 1) + (P_n^{\alpha_n-1} - 2)$$

$(P_n - 2)$ n’étant pas multiple de P_n , nous avons toujours sur cet intervalle $(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1)$ multiples de P_n .

(même raisonnement pour toutes les puissance de P_n intermédiaires)

$(P_n^{(\alpha_n-1)} - 2)$ n’étant pas multiple de $P_n^{(\alpha_n-1)}$, nous avons toujours sur cet intervalle $(P_n - 1)$ multiples de $P_n^{(\alpha_n-1)}$.

La longueur de cet intervalle étant constante pour α_n constant, elle contient un nombre de multiples de P_n et de $P_n^{(\alpha_n-1)}$ constant qui est le même pour tout t *(idem pour toutes les puissance de P_n intermédiaires)*.

Or, pour $t = 1$, le nombre de multiples de P_n a été défini précédemment :

Il existe $(P_n^{(\alpha_n-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$ sur $[1; P_n^{\alpha_n} - 1]$.

Des symétries sont donc à constater sur α_n lorsque $\alpha_n \geq 1$:

Sur l'intervalle $[1; P_n^{\alpha_n} - 1]$, il existe une symétrie en $\frac{P_n^{\alpha_n}}{2}$, c'est- à-dire qu'il existe des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^{\alpha_n}}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^{\alpha_n}}{2}; P_n^{\alpha_n} - 1\right]$$

▷ **Règle n° 3 :**

D'après les valeurs que peut prendre N sur l'intervalle suivant $]0; P_n^{\alpha_n}]$, les nombres N pouvant être multiples de P_n apparaissent régulièrement dans le tableau de référence *T.R.2*. Or,

$$P_n^{\alpha_n} = P_n \cdot P_n^{(\alpha_n - 1)}$$

Et donc, sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}]$, la quantité de nombres N pouvant être multiples de P_n vaut $P_n^{(\alpha_n - 1)}$

L'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}]$ peut aussi s'écrire $[1; P_n^{\alpha_n}]$. L'écart (c'est-à-dire la différence) entre les 2 bornes vaut $(P_n^{\alpha_n} - 1)$.

Si nous faisons varier les bornes de cet intervalle ainsi (de manière à ce que cet écart soit constant) :

$$[1 + r; P_n^{\alpha_n} + r] \quad (\text{pour } r \in \mathbb{N})$$

Comme l'écart entre ces 2 bornes est exactement le même, la quantité de nombres N pouvant être multiples de P_n vaut toujours $P_n^{(\alpha_n - 1)}$.

2.2.2 Début de l'étude

Soit k un nombre entier et soit ε un nombre entier non divisible par P_n . Menons l'étude d'après Le tableau de référence *T.R.2* (précédent).

Nous “numéroterons” k et ε par des nombres et des lettres (en indice) correspondant à chaque cas étudié afin de les différencier. Abordons ces différents cas en différents points, qui seront une étape vers la démonstration complète.

Dans les formules, les 3 points de suspensions “...” **entre 2 termes de la même ligne** représentent les nombres entiers consécutifs entre ces 2 termes.

• Pour $(P_n - 1)!$ nous avons :

$$\begin{aligned}(P_n - 1)! &= (P_n - 1).(P_n - 2).(P_n - 3)...3.2.1 \\ &= k_1 = \varepsilon_{n,1} \\ &= \prod_{h=1}^{h=(P_n-1)} (P_n - h)\end{aligned}$$

Par construction, $(P_n - 1)!$ est un nombre entier non divisible par P_n .

• Pour $(P_n^2 - 1)!$ nous avons :

$$\begin{aligned}(P_n^2 - 1)! &= P_n.2P_n.3P_n...(P_n - 1)P_n.k_2 \\ &= (P_n.P_n.P_n...P_n).[(1).(2).(3)...(P_n - 1)].k_2\end{aligned}$$

Ici, le nombre de multiples de P_n uniquement est $(P_n - 1)$, k_2 étant le produit de tous les autres nombres (k_2 est donc un nombre entier), il est non divisible par P_n (il n'y a aucun multiple de P_n dans k_2).

$$(P_n^2 - 1)! = P_n^{(P_n-1)}.\varepsilon_{n,2}$$

avec $\varepsilon_{n,2} = 1.2.3...(P_n - 1).k_2 = (P_n - 1)!.k_2$

k_2 est donc le produit de tous les nombres non divisibles par P_n , $\varepsilon_{n,2}$ n'est donc pas divisible par P_n .

Et sous une autre forme (en étalant le produit sur plusieurs lignes) :

$$\begin{aligned}
 (P_n^2 - 1)! &= (1).(2)...(P_n - 1).(1P_n) \\
 &\quad .(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n) \\
 &\quad .(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n) \\
 &\quad . \quad \dots \\
 &\quad .(P_n^2 - 3P_n + 1)...(P_n^2 - 2P_n - 1).[(P_n - 2).(P_n)] \\
 &\quad .(P_n^2 - 2P_n + 1)...(P_n^2 - P_n - 1).[(P_n - 1).(P_n)] \\
 &\quad .(P_n^2 - P_n + 1)...(P_n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
 (P_n^2 - 1)! &= (1).(2)...(P_n - 1) \\
 &\quad .(P_n + 1)...(2P_n - 1) \\
 &\quad .(2P_n + 1)...(3P_n - 1) \\
 &\quad . \quad \dots \\
 &\quad .(P_n^2 - 3P_n + 1)...(P_n^2 - 2P_n - 1) \\
 &\quad .(P_n^2 - 2P_n + 1)...(P_n^2 - P_n - 1) \\
 &\quad .(P_n^2 - P_n + 1)...(P_n^2 - 1) \\
 &\quad .(1P_n).(2P_n).(3P_n)....[(P_n - 2).(P_n)].[(P_n - 1).(P_n)]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 (P_n^2 - 1)! &= (P_n - 1)! \\
 &\quad .(P_n + 1)...(2P_n - 1) \\
 &\quad .(2P_n + 1)...(3P_n - 1) \\
 &\quad . \quad \dots \\
 &\quad .(P_n^2 - 3P_n + 1)...(P_n^2 - 2P_n - 1) \\
 &\quad .(P_n^2 - 2P_n + 1)...(P_n^2 - P_n - 1) \\
 &\quad .(P_n^2 - P_n + 1)...(P_n^2 - 1) \\
 &\quad .(P_n - 1)!. (P_n)^{(P_n - 1)}
 \end{aligned}$$

Pour retrouver $\varepsilon_{n,2}$, il suffit d'éliminer dans chaque nombre (c'est-à-dire entre 2 parenthèses) tous les facteurs de P_n s'il y en a (c'est-à-dire le dernier terme de la dernière ligne dans notre cas puisqu'il regroupe tous les facteurs de P_n) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,2} &= (P_n - 1)! \\ &\quad .(P_n + 1) \dots (2P_n - 1) \\ &\quad .(2P_n + 1) \dots (3P_n - 1) \\ &\quad \cdot \dots \\ &\quad .(P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\ &\quad .(P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^2 - P_n - 1) \\ &\quad .(P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^2 - 1) \\ &\quad .(P_n - 1)!\end{aligned}$$

• Pour $(P_n^3 - 1)!$ nous avons :

$$(P_n^3 - 1)! = P_n . 2P_n . 3P_n \dots (P_n^2 - 1) P_n . k_3$$

Ici, le nombre de termes sous la forme $a.P_n$ multiples de P_n est $(P_n^2 - 1)$. k_3 est le produit de tous les autres nombres, non divisible par P_n . Et le nombre de multiples de P_n^2 est $(P_n - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$(P_n^3 - 1)! = P_n^2 . 2P_n^2 . 3P_n^2 \dots (P_n - 1) P_n^2 . k'_3$$

k'_3 est le produit de tous les autres nombres. Ainsi, ce produit factoriel est divisible par $P_n^{(P_n^2-1)}$ et par $P_n^{(P_n-1)}$.

$$(P_n^3 - 1)! = P_n^{(P_n^2-1)} . P_n^{(P_n-1)} . \varepsilon_{n,3} = P_n^{(P_n^2+P_n-2)} . \varepsilon_{n,3}$$

Et donc $\varepsilon_{n,3}$ n'est pas divisible par P_n .

Et sous une autre forme (en étalant le produit sur plusieurs lignes et sur plusieurs pages) :

$$\begin{aligned}
(P_n^3 - 1)! &= (1).(2)...\,(P_n - 1).(1P_n) \\
&\quad .(P_n + 1)...\,(2P_n - 1).(2P_n) \\
&\quad .(2P_n + 1)...\,(3P_n - 1).(3P_n) \\
&\quad \cdot \quad \dots \\
&\quad .(P_n^2 - 3P_n + 1)...\,(P_n^2 - 2P_n - 1).[(P_n - 2).(P_n)] \\
&\quad .(P_n^2 - 2P_n + 1)...\,(P_n^2 - P_n - 1).[(P_n - 1)(P_n - 2).(P_n)(1)] \\
&\quad .(P_n^2 - P_n + 1)...\,(P_n^2 - 1).[(P_n^2).(1)] \\
&\quad .(P_n^2 + 1)...\,(P_n^2 + P_n - 1).[(P_n + 1).(P_n)] \\
&\quad .(P_n^2 + P_n + 1)...\,(P_n^2 + 2P_n - 1).[(P_n + 2).(P_n)] \\
&\quad .(P_n^2 + 2P_n + 1)...\,(P_n^2 + 3P_n - 1).[(P_n + 3).(P_n)] \\
&\quad \cdot \quad \dots \\
&\quad .(2P_n^2 - 3P_n + 1)...\,(2P_n^2 - 2P_n - 1).[(P_n - 1).(P_n).(2)] \\
&\quad .(2P_n^2 - 2P_n + 1)...\,(2P_n^2 - P_n - 1).[(2P_n - 1).(P_n)] \\
&\quad .(2P_n^2 - P_n + 1)...\,(2P_n^2 - 1).[(P_n^2).(2)] \\
&\quad .(2P_n^2 + 1)...\,(2P_n^2 + P_n - 1).[(2P_n + 1).(P_n)] \\
&\quad .(2P_n^2 + P_n + 1)...\,(2P_n^2 + 2P_n - 1).[(P_n + 1).(P_n).(2)] \\
&\quad .(2P_n^2 + 2P_n + 1)...\,(2P_n^2 + 3P_n - 1).[(2P_n + 3).(P_n)] \\
&\quad \cdot \quad \dots \\
&\quad .(3P_n^2 - 3P_n + 1)...\,(3P_n^2 - 2P_n - 1).[(3P_n - 2).(P_n)] \\
&\quad .(3P_n^2 - 2P_n + 1)...\,(3P_n^2 - P_n - 1).[(3P_n - 1).(P_n)] \\
&\quad .(3P_n^2 - P_n + 1)...\,(3P_n^2 - 1).[(P_n^2).(3)] \\
&\quad .(3P_n^2 + 1)...\,(3P_n^2 + P_n - 1).[(3P_n + 1).(P_n)] \\
&\quad .(3P_n^2 + P_n + 1)...\,(3P_n^2 + 2P_n - 1).[(3P_n + 2).(P_n)] \\
&\quad .(3P_n^2 + 2P_n + 1)...\,(3P_n^2 + 3P_n - 1).[(P_n + 1).(P_n).(3)] \\
&\quad \cdot \quad \dots \\
&\quad .(P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1)...\,(P_n^2 - 3P_n^2 - 2P_n - 1).[(P_n^2 - 3P_n - 2).(P_n)] \\
&\quad .(P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1)...\,(P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1).[(P_n^2 - 3P_n - 1).(P_n)] \\
&\quad .(P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1)...\,(P_n^3 - 3P_n^2 - 1).[(P_n^2).(P_n - 3)] \\
&\quad .(P_n^3 - 3P_n^2 + 1)...\,(P_n^3 - 3P_n^2 + P_n - 1).[(P_n^2 - 3P_n + 1).(P_n)] \\
&\quad \cdot \quad \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (P_n - 2)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (P_n - 1)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 1)
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
(P_n - 1)! &= (P_n - 1)! \\
&\cdot (P_n + 1) \dots (2P_n - 1) \\
&\cdot (2P_n + 1) \dots (3P_n - 1) \\
&\cdot \quad \dots \\
&\cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^2 - P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^2 - 1) \\
&\cdot (P_n^2 + 1) \dots (P_n^2 + P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 + P_n + 1) \dots (P_n^2 + 2P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 + 2P_n + 1) \dots (P_n^2 + 3P_n - 1) \\
&\cdot \quad \dots
\end{aligned}$$

. ...

$$.(2P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (2PP_n^2 - 2P_n - 1)$$

$$.(2P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (2P_n^2 - P_n - 1)$$

$$.(2P_n^2 - P_n + 1) \dots (2P_n^2 - 1)$$

$$.(2P_n^2 + 1) \dots (2P_n^2 + P_n - 1)$$

$$.(2P_n^2 + P_n + 1) \dots (2P_n^2 + 2P_n - 1)$$

$$.(2P_n^2 + 2P_n + 1) \dots (2P_n^2 + 3P_n - 1)$$

. ...

$$.(3P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (3P_n^2 - 2P_n - 1)$$

$$.(3P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (3P_n^2 - P_n - 1)$$

$$.(3P_n^2 - P_n + 1) \dots (3P_n^2 - 1)$$

$$.(3P_n^2 + 1) \dots (3P_n^2 + P_n - 1)$$

$$.(3P_n^2 + P_n + 1) \dots (3P_n^2 + 2P_n - 1)$$

$$.(3P_n^2 + 2P_n + 1) \dots (3P_n^2 + 3P_n - 1)$$

. ...

$$.(P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 1)$$

$$.(P_n^3 - 3P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 + P_n - 1)$$

. ...

$$.(P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 1)$$

$$.(P_n^3 - 2P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 + P_n - 1)$$

. ...

$$.(P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 1)$$

$$.(P_n^3 - P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 + P_n - 1)$$

. ...

$$.(P_n^3 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n - 1)$$

$$.(P_n^3 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 1)$$

. ...

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les termes multiples de P_n :)

$$\begin{aligned}
& .(1P_n).(2P_n).(3P_n)...\left[(P_n-2).(P_n)\right].\left[(P_n-1).(P_n)\right] \\
& .(P_n^2).\left[(P_n+1).P_n\right].\left[(P_n+2).P_n\right]...\left[(P_n-1).P_n.2\right].\left[(2P_n-1).P_n\right] \\
& .2(P_n^2).\left[(2P_n+1).P_n\right]...\left[(3P_n-2).P_n\right].\left[(3P_n-1).P_n\right] \\
& .3(P_n^2).\left[(3P_n+1).P_n\right]...\left[(P_n-3P_n-2).P_n\right].\left[(P_n-3P_n-1).P_n\right] \\
& .[P_n^2.(P_n-3)].[(P_n^2-3P_n+1).P_n]...[(P_n^2-2P_n-1).P_n] \\
& .[P_n^2.(P_n-2)].[(P_n^2-2P_n+1).P_n]...[(P_n^2-P_n-1).P_n] \\
& .[P_n^2.(P_n-1)].[(P_n^2-P_n+1).P_n]...[(P_n^2-2).P_n].[(P_n-1).P_n]
\end{aligned}$$

Pour retrouver $\varepsilon_{n,3}$, il suffit d'éliminer dans chaque nombre tous les facteurs de P_n s'il y en a, cela nous donne, en réorganisant de manière "avantageuse" les termes non multiples de P_n restants :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,3} = & (P_n-1)! \\
& .(P_n+1)...\left(2P_n-1\right) \\
& .\left(2P_n+1\right)...\left(3P_n-1\right) \\
& . \quad \dots \\
& .(P_n^2-3P_n+1)...\left(P_n^2-2P_n-1\right) \\
& .(P_n^2-2P_n+1)...\left(P_n^2-P_n-1\right) \\
& .(P_n^2-P_n+1)...\left(P_n^2-1\right) \\
& .(P_n^2+1)...\left(P_n^2+P_n-1\right) \\
& .(P_n^2+P_n+1)...\left(P_n^2+2P_n-1\right) \\
& .(P_n^2+2P_n+1)...\left(P_n^2+3P_n-1\right) \\
& . \quad \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (2P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (2P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (2P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 - P_n + 1) \dots (2P_n^2 - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + 1) \dots (2P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + P_n + 1) \dots (2P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + 2P_n + 1) \dots (2P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (3P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (3P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (3P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 - P_n + 1) \dots (3P_n^2 - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + 1) \dots (3P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + P_n + 1) \dots (3P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + 2P_n + 1) \dots (3P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 1) \\
& \cdot \quad \dots
\end{aligned}$$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les nombres restants non multiples de P_n :)

$$\begin{aligned}
&.(1).(2).(3)...(P_n - 2).(P_n - 1) \\
&.(P_n + 1).(P_n + 2)...(P_n - 1).(2).(2P_n - 1) \\
&.(2).(2P_n + 1)...(3P_n - 2).(3P_n - 1) \\
&.(3).(3P_n + 1)...(P_n - 3P_n - 2).(P_n - 3P_n - 1) \\
&.(P_n - 3).(P_n^2 - 3P_n + 1)...(P_n^2 - 2P_n - 1) \\
&.(P_n - 2).(P_n^2 - 2P_n + 1)...(P_n^2 - P_n - 1) \\
&.(P_n - 1).(P_n^2 - P_n + 1)...(P_n^2 - 2).(P_n^2 - 1)
\end{aligned}$$

Or, dans cette dernière partie de l'égalité, nous constatons que nous pouvons réorganiser les termes restants ainsi (les couleurs noires forment un ensemble et les couleurs rouges forment un autre ensemble):

$$\begin{aligned}
&(1).(2).(3)...(P_n - 2).(P_n - 1) \\
&.\textcolor{red}{(1)}.(P_n + 1).(P_n + 2)...(P_n - 1).(2).(2P_n - 1) \\
&.\textcolor{red}{(2)}.(2P_n + 1)...(3P_n - 2).(3P_n - 1) \\
&.\textcolor{red}{(3)}.(3P_n + 1)...(P_n - 3P_n - 2).(P_n - 3P_n - 1) \\
&.\textcolor{red}{(P_n - 3)}.(P_n^2 - 3P_n + 1)...(P_n^2 - 2P_n - 1) \\
&.\textcolor{red}{(P_n - 2)}.(P_n^2 - 2P_n + 1)...(P_n^2 - P_n - 1) \\
&.\textcolor{red}{(P_n - 1)}.(P_n^2 - P_n + 1)...(P_n^2 - 2).(P_n^2 - 1) \\
&= \\
&(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^2 - 1) \\
&.\textcolor{red}{(P_n - 1)}!
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,3} &= (P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^3 - 1) \\
&.(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^2 - 1) \\
&.(P_n - 1)!
\end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_{n,3}$ non divisible par P_n .

- Pour $(P_n^4 - 1)!$ nous avons :

$$(P_n^4 - 1)! = P_n.2P_n.3P_n...(P_n^3 - 1)P_n.k_4$$

Ici, le nombre de termes sous la forme $a.P_n$ multiples de P_n est $(P_n^3 - 1)$. k_4 est le produit de tous les autres nombres, non divisible par P_n . Le nombre de multiples de P_n^2 est $(P_n^2 - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$(P_n^4 - 1)! = P_n^2.2P_n^2.3P_n^2...(P_n^2 - 1)P_n^2.k'_4$$

k'_4 est le produit de tous les autres nombres. Le nombre de multiples de P_n^3 est $(P_n - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$(P_n^4 - 1)! = P_n^3.2P_n^3.3P_n^3...(P_n - 1)P_n^3.k''_4$$

k''_4 est le produit de tous les autres nombres. Ainsi, ce produit factoriel est divisible par $P_n^{(P_n^3-1)}$, par $P_n^{(P_n^2-1)}$ et par $P_n^{(P_n-1)}$.

$$\begin{aligned}(P_n^4 - 1)! &= P_n^{(P_n^3-1)}.P_n^{(P_n^2-1)}.P_n^{(P_n-1)}. \varepsilon_{n,4} \\ &= P_n^{(P_n^3+P_n^2+P_n-3)}. \varepsilon_{n,4}\end{aligned}$$

Et donc $\varepsilon_{n,4}$ n'est pas divisible par P_n .

Même principe que précédemment concernant la réécriture et une réorganisation adéquate (l'écriture de chaque ligne avant simplification serait trop lourde à gérer, même en plusieurs pages) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,4} &= (P_n - 1)!. (P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^4 - 1) \\ &\quad .(P_n - 1)!. (P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^3 - 1) \\ &\quad .(P_n - 1)!. (P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^2 - 1) \\ &\quad .(P_n - 1)!\end{aligned}$$

• Pour $(P_n^x - 1)!$ nous avons :

Ecrivons toutes les possibilités pour la divisibilité de ce produit factoriel, pour $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$:

$$(P_n^x - 1)! = P_n \cdot 2P_n \cdot 3P_n \dots (P_n^{(x-1)} - 1)P_n \cdot k_x$$

Ceci signifie aussi que, sur l'intervalle $]0; P_n^x[$, il existe $(P_n^{(x-1)} - 1)$ multiples de P_n . Mais continuons (les 3 points de suspension dans le produit suivant représente des nombres entiers consécutifs:

$$\begin{aligned} (P_n^x - 1)! &= P_n^2 \cdot 2P_n^2 \cdot 3P_n^2 \dots (P_n^{(x-2)} - 1)P_n^2 \cdot k'_x \\ &= P_n^3 \cdot 2P_n^3 \cdot 3P_n^3 \dots (P_n^{(x-3)} - 1)P_n^3 \cdot k''_x \\ &\dots \\ &= P_n^{(x-1)} \cdot 2P_n^{(x-1)} \cdot 3P_n^{(x-1)} \dots (P_n - 1)P_n^{(x-1)} \cdot k_{x'} \end{aligned}$$

Avec k_x , k'_x , k''_x , ... , $k_{x'}$ des nombres entiers, chacun étant le produit des nombres qui n'apparaissent pas dans le produit (pour alléger l'écriture).

Et donc sur l'intervalle $]0; P_n^x[$, il existe $(P_n - 1)$ multiples de $P_n^{(x-1)}$, d'après cette dernière formule. Mais nous devons aussi tenir compte de ce qui suit :

Sur l'intervalle $]0; P_n^x[$,

Il existe $(P_n^{(x-1)} - 1)$ multiples de P_n ,

dont $(P_n^{(x-2)} - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,

dont $(P_n^{(x-3)} - 1)$ sont multiples de P_n^3 ,

...

dont $(P_n^3 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(x-3)}$,

dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(x-2)}$,

et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de $P_n^{(x-1)}$.

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}(P_n^x - 1)! &= P_n^{(P_n^{(x-1)}-1)} \cdot P_n^{(P_n^{(x-2)}-1)} \cdot P_n^{(P_n^{(x-3)}-1)} \dots P_n^{(P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,x} \\ &= P_n^{(P_n^{(x-1)}-1 + P_n^{(x-2)}-1 + P_n^{(x-3)}-1 + \dots + P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,x}\end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_{n,x}$ un nombre entier non divisible par P_n (par construction). Le terme “ -1 ” à l’intérieur des parenthèses est répété $(x-1)$ fois. Donc :

$$\begin{aligned}(P_n^x - 1)! &= P_n^{[P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} + P_n^{(x-3)} + \dots + P_n - (x-1)]} \cdot \varepsilon_{n,x} \\ &= P_n^{[P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} + P_n^{(x-3)} + \dots + P_n + 1 - x]} \cdot \varepsilon_{n,x}\end{aligned}$$

Or,

$$[P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} + P_n^{(x-3)} + \dots + P_n + 1] = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}$$

Donc,

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \cdot \varepsilon_{n,x} \quad (\varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n).$$

Et donc,

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

Si P_n n’était pas un nombre premier, alors $\varepsilon_{n,x}$ serait un nombre entier divisible par ce nombre. Ce qui explique la fonction F_c , vue précédemment. En effet, pour :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}}$$

où l’on a simplement divisé l’expression de $\varepsilon_{n,x}$ par P_n , $\varepsilon_{M,x}$ vaut un nombre rationnel si M est un nombre premier, et vaut un nombre entier si M est un autre nombre entier (non premier). Ainsi, nous n’avons pas besoin de connaître les nombres premiers pour formuler cette expression.

Démonstration :

Si M est un nombre entier qui n'est pas un nombre premier (M est tel que $M \in \mathbb{N}$ et $M \notin \mathbb{P}$), alors M peut se décomposer ainsi :

$$M = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

(développement 1)

Avec P_1, P_2, P_3, \dots et P_n , avec $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$ et avec au moins 2 des termes $\alpha_n \geq 1$.

Rappelons que pour M défini ainsi, nous avons nécessairement :

$$P_n < M$$

ou, autrement dit, un nombre entier non premier est supérieur à chaque nombre premier P_n (élevé à la puissance α_n) dont il est composé.

Et donc nécessairement :

$$P_n^x < M^x$$

Avec $x \geq 1$, car ce raisonnement s'applique seulement si M peut être décomposé en produit de nombres premiers. En reprenant la méthode précédente (voir la formule de $\varepsilon_{M,x}$), nous avons :

$$\begin{aligned} (M^x - 1)! &= M.2M.3M \dots (M^{(x-1)} - 1).M.k_x \\ &= M^2.2M^2.3M^2 \dots (M^{(x-2)} - 1).M^2.k'_x \\ &= M^3.2M^3.3M^3 \dots (M^{(x-3)} - 1).M^3.k''_x \\ &\dots \\ &= M^{(x-1)}.2M^{(x-1)}.3M^{(x-1)} \dots (M - 1).M^{(x-1)}.k_{x'} \end{aligned}$$

Avec $k_x, k'_x, k''_x, \dots, k_{x'}$ des nombres entiers, chacun étant le produit des nombres qui n'apparaissent pas dans le produit (pour alléger l'écriture).

(rappelons que cette méthode consiste à regrouper ensemble tous les facteurs premiers possibles pour chaque puissance de x).

Or, M étant composé de produit de facteurs premiers, nous retrouvons nécessairement tous ses facteurs dans le produit factoriel puisque chacun est inférieur à M :

$$\begin{aligned}(M^x - 1)! &= P_1^{(x.\alpha_1)}.P_2^{(x.\alpha_2)}.P_3^{(x.\alpha_3)}...P_n^{(x.\alpha_n)}.k_{x''}\\ &= M^x.k_{x''} \quad (\text{avec } k_{x''} \text{ un nombre entier})\end{aligned}$$

Pour alléger la démonstration, il n'est pas utile d'étudier tous les multiples de chaque facteur des P_n , ainsi, $(M^x - 1)!$ est divisible par au moins M "en plus de" :

$$M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x\right)}$$

Ce qui revient à écrire :

$$(M^x - 1)! = (\varepsilon_{M,x}).M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}$$

(avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $M \notin \mathbb{P}$).

Ce qui doit être toujours vrai lorsque $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_n$ avec au moins 2 des termes $\alpha_n \geq 1$.

(développement 2)

Supposons que $M = P_n^x$

Le résultat de $(P_n^x - 1)!/\varepsilon_{n,x}$ contient le nombre maximum possible de divisibilités par P_n . Ce nombre maximum se retrouve dans la puissance de P_n , c'est-à-dire dans $\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1} - x\right)$.

Pour $x = 1$,

$$(M - 1)! = (P_n - 1)!$$

Or, $(P_n - 1)!$ n'est jamais divisible par P_n car aucun des nombre du produit de la factorielle n'est divisible par P_n .

Pour $x > 1$,

$$(M - 1)! = (P_n - 1)!$$

Or, $(M - 1)!$ est divisible par M si et seulement si l'on retrouve le produit de ses facteurs premiers dans les produits de la factorielle.

Par exemple, pour $M = P_1.P_2$, comme $M > P_2 > P_1$, nous avons :

$$(M - 1)! = (M - 1).(M - 2)...P_2.P_1...3.2$$

est divisible par M .

Et, de manière plus explicite, pour notre cas où $M = P_n^x$ avec quelques exemples :

* Si $P_n = 2$ et $x = 3$,

$$(M - 1)! = 7.(6).5.(4).3.(2).1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$.

* Si $P_n = 3$ et $x = 2$,

$$(M - 1)! = 8.7.(6).5.4.(3).2.1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$.

* Si $P_n = 3$ et $x = 3$,

$$(M-1)! = 26.25.(24).23.22.(21).20.19.(18).17.16.(15).14.13.(12).11.10.(9).8.7.(6).5.4.(3).2.1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$.

* Si $P_n = 5$ et $x = 2$,

$$(M-1)! = 24.23.22.21.(20).19.18.17.16.(15).14.13.12.11.(10).9.8.7.6.(5).4.3.2.1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$.

La question qu'il convient alors de nous poser est : existe-t-il des nombres M qui échappe à cette règle ? Y'a-t-il toujours des facteurs premiers en nombre suffisant dans la décomposition du produit factoriel de M ?

Pour y répondre, étudions des inégalités, tout en gardant à l'esprit l'égalité $M = P_n^x$.

$(M-1)!$ est divisible par au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, avec, comme nous l'avons déjà déterminé :

$$\begin{aligned}(M-1)! &= (P_n^x-1)! \\ (P_n^x-1)! &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}.(\varepsilon_{n,x})\end{aligned}$$

$(\varepsilon_{n,x}$ non divisible par P_n , donc seul le reste de la formule est divisible par M).

Or, pour que $(M-1)!$ soit divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, nous pouvons borner l'inégalité par le minimum auquel $(M-1)!$ doit être divisible, c'est-à-dire par M , puis comparer cette borne inférieure à la formule théorique que nous avons déterminé pour obtenir le nombre de divisibilité par P_n :

$$P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)} \geq P_n^x$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) &\geq x \\ P_n^x &\geq 2.x(P_n - 1) + 1 \\ P_n^x - 2.x(P_n - 1) &\geq 1 \end{aligned}$$

Rappelons que ce raisonnement est à appliquer seulement si $x \geq 2$ car dans le cas où $x = 1$, $(P_n - 1)!$ n'est pas divisible par P_n .

(Vérification 1)

Si $x = 2$, nous avons :

$$\begin{aligned} P_n^2 - 4.P_n + 4 &\geq 1 \\ \Rightarrow (P_n - 2)^2 &\geq 1 \\ \text{Donc } P_n &\geq 3 \end{aligned}$$

Les nombres entiers inférieurs à 3 se trouvent sur l'intervalle $]0; 3[$. Ces nombres entiers sont 1 et 2. Or, 2 est le plus petit nombre premier. La formule suivante ayant été établie :

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}.(\varepsilon_{n,x})$$

Cette formule échappe donc au cas $P_n = 2$ lorsque $x = 2$. Or, 2 étant le plus petit nombre premier, tous les cas ont donc été examinés pour $x = 2$.

(Vérification 2, suite)

Si $x \geq 3$, nous cherchons toujours à établir la justesse de l'inégalité précédente, que nous redonnons ici :

$$P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \geq P_n^x$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) &\geq x \\ \Rightarrow \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - 2x &\geq 0 \end{aligned}$$

Remarquons que le plus petit nombre premier étant 2, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} &\geq \frac{2^x - 1}{2 - 1} \\ \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - 2x &\geq \frac{2^x - 1}{2 - 1} - 2x \end{aligned}$$

Or, pour $x \geq 3$, nous avons :

$$\begin{aligned} 2^x &> 2x + 1 \\ \Rightarrow 2^x - 1 - 2x &> 0 \\ \Rightarrow \frac{2^x - 1}{2 - 1} - 2x &> 0 \end{aligned}$$

Et donc, pour $x \geq 3$, nous pouvons déduire que :

$$\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - 2x > 0$$

Ce qui est une condition nécessaire pour que les formules $\varepsilon_{n,x}$ et $\varepsilon_{M,x}$ établies soient tels que nous les avons défini juste avant cette démonstration.

Conclusion partielle :

- Pour $P_n \in \mathbb{P}$:

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \cdot (\varepsilon_{n,x})$$

avec $\varepsilon_{n,x}$ un nombre entier non divisible par P_n , cette formule est donc toujours vraie sauf pour le seul cas de $P_n = 2$ et $x = 2$.

- Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \notin \mathbb{P}$:

$$(M^x - 1)! = M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)} \cdot (\varepsilon_{M,x})$$

Cette formule est donc toujours vraie sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$.

Et donc :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}}$$

$\varepsilon_{M,x}$ vaut un nombre rationnel si M est un nombre premier, et vaut un nombre entier si M est un autre nombre entier (non premier) supérieur à 3, toujours en dehors du seul cas $M = 4$ et $x = 1$.

\Rightarrow ATTENTION :

Par la suite, nous considérerons ces 2 cas comme acquis pour tout le reste de l'étude : à chaque fois que nous utiliserons les formules $\varepsilon_{n,x}$ et $\varepsilon_{M,x}$, nous sous-entendrons que ces formules sont toujours valables sauf dans le cas de $P_n = 2$ et $x = 2$, et respectivement sauf dans le cas de $M = 4$ et $x = 1$.

(Explications)

Explication concernant le “problème” rencontré pour $M = 4$:

Ce problème s’explique parce qu’il n’existe qu’un multiple de 2 sur l’intervalle $]0; 4[$. Or, une division par $M (= 2^2)$ aurait été nécessaire pour que la formule donne toujours les résultats désirés, c’est-à-dire $\varepsilon_{M,x}$ divisible par M lorsque M est un nombre entier qui n’est pas un nombre premier.

Comme ce n’est pas le cas pour $M = 4$, nous avons plusieurs choix qui s’offre à nous pour contourner ce problème : soit élever $(M-1)!$ au carré pour obtenir la divisibilité par M lorsque $M = 4$, soit en construisant une formule “annexe” qui corrige ce problème, comme nous l’avons fait pour la “fonction A ” vu dans la partie précédente (voir partie “**2.1 Vue d’ensemble des étapes à suivre**” page 43).

En tenant compte de toutes ces informations nous pouvons formuler les “fonctions” F_c et A vues vu dans la partie “**2.1 Vue d’ensemble des étapes à suivre**” (page 43).

• Suite 1 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$:

Nous désirons maintenant savoir ce qu’il advient de la divisibilité de $\varepsilon_{n,x}$ et de $\varepsilon_{M,x}$ par P_n lorsque $x \geq 2$. Le théorème de WILSON nous permettant directement de savoir que :

$$(P_n - 1)! = P_n \cdot w_1 - 1 \quad (\text{avec } w_1 \text{ un nombre entier})$$

D’après ce que nous venons de voir, nous pouvons déduire de la formule $\varepsilon_{n,x}$ qu’elle est équivalente aux produits de tous les termes non divisibles par P_n . Nous avons donc ce qui suit :

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

En décomposant $(P_n^x - 1)!$ (ceci étant un peu lourd à gérer, nous allons étaler l'égalité en produits sur plusieurs lignes et plusieurs pages, d'abord les produits des termes non multiples de P_n , puis les produits des termes multiples de P_n), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(P_n^x - 1)! &= (P_n^x - 1).(P_n^x - 2) \dots (P_n^x - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n - 1).(P_n^x - P_n - 2) \dots (P_n^x - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n - 1).(P_n^x - 2P_n - 2) \dots (P_n^x - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - P_n^2 - 1).(P_n^x - P_n^2 - 2) \dots (P_n^x - P_n^2 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^x - P_n^2 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - P_n^2 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 1) \dots (P_n^x - 2P_n^2 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^x - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^2 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 3P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - P_n^3 - 1).(P_n^x - P_n^3 - 2) \dots (P_n^x - P_n^3 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^3 - P_n - 1) \dots (P_n^x - P_n^3 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^3 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - P_n^3 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 1) \dots (P_n^x - 2P_n^3 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^3 - P_n - 1) \dots (P_n^x - 2P_n^3 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - 2P_n^3 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^3 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - P_n - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^3 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^3 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 1) \dots (P_n^3 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^2 - 1) \dots (P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n - 1) \cdot (P_n - 2) \cdot (P_n - 3) \dots (3) \cdot (2) \cdot (1)
\end{aligned}$$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les termes multiples de P_n et uniquement les termes multiples de P_n dans le même ordre décroissant que suivi précédemment : voir page suivante)

$$\begin{aligned}
& \cdot (P_n^x - P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - P_n^2) \cdot (P_n^x - P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^x - P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^x - P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 2P_n^2) \cdot (P_n^x - 2P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^2) \cdot (P_n^x - 3P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - P_n^3) \cdot (P_n^x - P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^x - P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^x - P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 2P_n^3) \cdot (P_n^x - 2P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3) \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3) \cdot (P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2) \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2) \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^2) \cdot (P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^2 - 3P_n) \dots (P_n)
\end{aligned}$$

En divisant ce “grand” produit par $P_n \left(\frac{P_n^{x-1}}{P_n-1} - x \right)$, nous éliminons tous les facteurs P_n de chaque terme multiple de P_n . Ceci nous permet d’observer des “trous” à la place des multiples de P_n dont la valeur est un “reste” non divisible par P_n . Nous obtenons donc ce qui suit : (*voir page suivante*)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} = & (P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^x - 1) \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^{(x-1)} - 1) \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^{(x-2)} - 1) \\
& \cdot \dots \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^3 - 1) \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...(P_n^2 - 1) \\
& .(P_n - 1)!
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire (produits étalés ligne par ligne avec des séparations sous forme de tirets rouges pour plus de clarté, c'est-à-dire que par rapport à notre dernière formule de $\varepsilon_{n,x}$, lorsque nous passons à la ligne suivante de cette formule, les tirets seront là pour marquer ce passage d'une ligne à l'autre) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} = & \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^{(x-1)}.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-1)} - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-1)} - 2).P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{---}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^{(x-2)}.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-2)} - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-2)} - 2).P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^{(x-3)}.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-3)} - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-3)} - 2).P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \dots \\
& \text{-----}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^2 - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^2 - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)
\end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} &= \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-1)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] \\
&\cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-2)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] \\
&\cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-3)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] \\
&\cdot \dots \\
&\cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^2} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] \\
&\cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^1} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] \\
&\cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^0} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]
\end{aligned}$$

Donc, pour finir, et pour $x \geq 1$, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b=P_n^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)$$

Et donc

$$\frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b=P_n^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)$$

Prenons un exemple pour bien voir concrètement comment cette formule se représente. Prenons $P_n = P_3 = 5$ ($n = 3$ car dans l'ordre croissant, 5 est le 3^{ème} de la liste des nombres premiers) et prenons $x = 3$ (les couleurs permettent une réorganisation en groupe, un groupe par couleur. Entre les parenthèses, les multiples de 5 sont mis en évidence par un produit par 5) :

$$\begin{aligned}
 (5^3 - 1)! &= 124! \\
 &= 1.2.3.4.(\textcolor{red}{1}.5).6.7.8.9.(\textcolor{red}{2}.5).11.12.13.14.(\textcolor{red}{3}.5).16.17.18.19.(\textcolor{red}{4}.5).21.22.23.24 \\
 &\quad .(\textcolor{blue}{1}.5.5).26.27.28.29.(\textcolor{red}{6}.5).31.32.33.34.(\textcolor{red}{7}.5).36.37.38.39.(\textcolor{red}{8}.5).41.42.43.44 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{9}.5).46.47.48.49.(\textcolor{blue}{2}.5.5).51.52.53.54.(\textcolor{red}{11}.5).56.57.58.59.(\textcolor{red}{12}.5).61.62.63.64 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{13}.5).66.67.68.69.(\textcolor{red}{14}.5).71.72.73.74.(\textcolor{blue}{3}.5.5).76.77.78.79.(\textcolor{red}{16}.5).81.82.83.84 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{17}.5).86.87.88.89.(\textcolor{red}{18}.5).91.92.93.94.(\textcolor{red}{19}.5).96.97.98.99.(\textcolor{blue}{4}.5.5).101.102.103 \\
 &\quad .104.(\textcolor{red}{21}.5).106.107.108.109.(\textcolor{red}{22}.5).111.112.113.114.(\textcolor{red}{23}.5).116.117.118.119 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{24}.5).121.122.123.124
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5^3 - 1)! &= 5^{\left(\frac{5^3-1}{5-1}-3\right)}.\varepsilon_{3,3} \quad (\varepsilon_{3,3} \text{ non divisible par } 5) \\
 &= 5^{28}.\varepsilon_{3,3}
 \end{aligned}$$

$\varepsilon_{3,3}$ nous permet "d'éliminer" tous les 5 qui sont facteurs de chaque nombre dans notre produit.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{3,3} &= 1.2.3.4.(\textcolor{red}{1}).6.7.8.9.(\textcolor{red}{2}).11.12.13.14.(\textcolor{red}{3}).16.17.18.19.(\textcolor{red}{4}).21.22.23.24 \\
 &\quad .(\textcolor{blue}{1}).26.27.28.29.(\textcolor{red}{6}).31.32.33.34.(\textcolor{red}{7}).36.37.38.39.(\textcolor{red}{8}).41.42.43.44 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{9}).46.47.48.49.(\textcolor{blue}{2}).51.52.53.54.(\textcolor{red}{11}).56.57.58.59.(\textcolor{red}{12}).61.62.63.64 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{13}).66.67.68.69.(\textcolor{red}{14}).71.72.73.74.(\textcolor{blue}{3}).76.77.78.79.(\textcolor{red}{16}).81.82.83.84 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{17}).86.87.88.89.(\textcolor{red}{18}).91.92.93.94.(\textcolor{red}{19}).96.97.98.99.(\textcolor{blue}{4}).101.102.103 \\
 &\quad .104.(\textcolor{red}{21}).106.107.108.109.(\textcolor{red}{22}).111.112.113.114.(\textcolor{red}{23}).116.117.118.119 \\
 &\quad .(\textcolor{red}{24}).121.122.123.124
 \end{aligned}$$

D'où l'on voit apparaître clairement dans chaque groupe de couleur une réorganisation possible :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{3,3} = & (1.2.3.4).(6.7.8.9).(11.12.13.14).(16.17.18.19).(21.22.23.24) \\ & .(26.27.28.29).(31.32.33.34).(36.37.38.39).(41.42.43.44).(46.47.48.49) \\ & .(51.52.53.54).(56.57.58.59).(61.62.63.64).(66.67.68.69).(71.72.73.74) \\ & .(76.77.78.79).(81.82.83.84).(86.87.88.89).(91.92.93.94).(96.97.98.99) \\ & .(101.102.103.104).(106.107.108.109).(111.112.113.114).(116.117.118.119) \\ & .(121.122.123.124).(\textcolor{red}{1.2.3.4}).(\textcolor{red}{6.7.8.9}).(\textcolor{red}{11.12.13.14}).(\textcolor{red}{16.17.18.19}) \\ & .(\textcolor{red}{21.22.23.24}).(\textcolor{blue}{1.2.3.4})\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à :

$$\varepsilon_{3,3} = \prod_{c=0}^{c=(3-1)} \prod_{b=1}^{b=5^c} \prod_{a=1}^{a=(5-1)} (b.5 - a)$$

• Suite 2 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$:

Pour éviter de nous perdre dans des développements trop longs, nous ferons des simplifications dans chacune des prochaines parties qui nous permettront d'aller à l'essentiel. C'est-à-dire que nous n'écrirons pas les développements en polynôme comme nous le devrions, mais nous allons simplifier leur écriture en factorisant les termes les plus significatifs pour résoudre notre problème.

Poursuivons en notant $B = b.P_n$ (d'après la formule de $\varepsilon_{n,x}$, b est implicitement un nombre entier), nous avons :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) = \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a)$$

En développant, nous obtenons un résultat du type :

- Si P_n est paire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a) = (B).f(B) - (P_n - 1)!$$

- P_n est impaire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a) = (B).f(B) + (P_n - 1)!$$

avec $f(B)$ un nombre entier (en fonction de B). $(P_n - 1)!$ apparaît suite à la multiplication entre eux de tous les “ a ” (à droite de la parenthèse) entre eux, pour “ a ” partant de 1 jusqu’à $(P_n - 1)$ et en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Comme $(P_n - 1)$ est paire lorsque P_n est impaire, lors du développement, nous avons une multiplication de “ $-a$ ” un nombre paire de fois, ce qui rend positif le signe devant la factorielle. Evidemment, le reste du développement est nécessairement une somme de puissances de B (un “polynôme” dont les puissances décroissent de $(P_n - 1)$ jusqu’à 1 en passant par toutes les valeurs intermédiaires, ce qui nous permet une factorisation par B . Nous appellerons $f(B)$ “nombre entier polynômiale”), chaque puissance de B ayant un nombre entier pour coefficient.

En revenant aux variables de départ, nous avons donc :

- Si P_n est paire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) = (b.P_n).f(b.P_n) - (P_n - 1)!$$

- P_n est impaire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a) = (b.P_n).f(b.P_n) + (P_n - 1)!$$

avec $f(b.P_n)$ un nombre entier polynômiale de degré $(P_n - 1)$ en fonction de b et de P_n .

Dans le cas où P_n est paire :

si $P_n = 2.m$ (avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$)

$P_n = 2$ est le seul nombre premier qui soit paire (donc $m = 1$) car tous les autres nombres paires > 0 sont composés en produit de 2 et de $m > 1$. Nous avons donc :

$$\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2.b - a) = (2.b) - 1$$

Ce qui signifie donc que

$$\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2.b - a) + 1 = (2.b)$$

Et donc $\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2.b - a) + 1$ est divisible par le nombre premier 2.

Dans le cas où P_n est impaire :

P_n est impaire dans tous les autres cas. D'après le théorème de WILSON, $[(P_n - 1)! + 1]$ est divisible par P_n , ce qui peut être noté comme ceci :

$$(P_n - 1)! + 1 = P_n.w_1 \text{ (avec } w_1 \text{ un nombre entier).}$$

Ou encore

$$(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1$$

D'où nous déduisons :

$$\begin{aligned} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) &= (b.P_n).f(b.P_n) + P_n.w_1 - 1 \\ &= P_n.[b.f(b.P_n) + w_1] - 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] + 1 = P_n.[b.f(b.P_n) + w_1]$$

Et donc $\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] + 1$ est divisible par P_n .

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$:

$$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] + 1 \quad \text{divisible par } P_n.$$

• Suite 3 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$:

Poursuivons ce dernier raisonnement en notant (pour alléger la lecture) :

$$[b.f(b.P_n) + w_1] = w_{2,c}$$

Avec $w_{2,c}$ un nombre entier. Nous avons maintenant :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) = P_n.w_{2,c} - 1$$

Nous avons simplement :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] = \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1)$$

Comme précédemment, nous pouvons développer ce produit et obtenir un résultat du type (ici aussi, nous distinguons 2 cas possibles) :

- Si P_n est paire (et pour $c \geq 1$, implicitement c est un nombre entier) :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) = (P_n.w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) + 1$$

- Et si P_n est impaire (et pour tout $c \geq 0$, implicitement c est un nombre entier) :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) = (P_n \cdot w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) - 1$$

Avec $f(P_n \cdot w_{2,c})$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n et de $w_{2,c}$.
 “ 1 ” apparaît suite à la multiplication entre eux de tous les “ 1 ” (à droite de la parenthèse) entre eux un nombre de fois qui vaut P_n puissance (c) .
 “+1” apparaît si ce nombre de fois est paire et “−1” apparaît si ce nombre de fois est impaire. Evidemment, le reste du développement est forcément une somme de puissance de $(P_n \cdot w_{2,c})$, chacune ayant un nombre entier pour coefficient.

Cas de P_n paire :

Nous avons déjà vu qu’un seul cas n’est concerné, c’est celui de $P_n = 2$:

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) = \prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1)$$

Or, $2^{(c)}$ est toujours un nombre paire pour $c \geq 1$, et donc multiple de 2 (attendre la fin de ce raisonnement pour que le cas de $c = 0$ apparaisse naturellement). En développant ce produit, nous obtenons :

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1) = (2 \cdot w_{2,c}) \cdot f(2 \cdot w_{2,c}) + 1$$

Donc

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1) \right] - 1 \quad \text{est divisible par le nombre premier 2.}$$

Pour faire le lien avec le cas de P_n impaire, nous allons devoir poursuivre :

$$\begin{aligned}
\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c} - 1) &= (2.w_{2,c}).f(2.w_{2,c}) + 1 \\
&= (2.w_{2,c}).f(2.w_{2,c}) + 2 - 1 \\
&= 2.[(w_{2,c}).f(2.w_{2,c}) + 1] - 1
\end{aligned}$$

Et donc, pour tout $c \geq 0$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c} - 1) \right] + 1 \quad \text{est également divisible par le nombre premier 2.}$$

Cas de P_n impaire :

Comme nous l'avons déjà vu, ce cas concerne tous les autres nombres premiers (et pour $c \geq 0$).

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) = P_n.(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) - 1$$

$$\left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) \right] + 1 = P_n.(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c})$$

$$\text{Donc } \left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) \right] + 1 \quad \text{est divisible par } P_n.$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $c \geq 0$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right] + 1 \text{ est divisible par } P_n.$$

• Suite 4 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$:

Avant de pouvoir donner une conclusion générale sur la divisibilité de $\varepsilon_{n,x}$,
il nous faut encore traiter cette dernière étape. Rappelons que :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b=P_n^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)$$

Nous avons noté

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) = P_n.(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) - 1$$

Toujours pour alléger la lecture, notons :

$$(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) = w_{3,x} \quad (\text{avec } w_{3,x} \text{ un nombre entier})$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} (P_n.w_{3,x} - 1) = P_n.(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x}) - 1 \quad \text{si } x \text{ est impaire.}$$

Et

$$\varepsilon_{n,x} = P_n.(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x}) + 1 \quad \text{si } x \text{ est paire.}$$

Avec $f(P_n.w_{3,x})$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n et de $w_{3,x}$.

Et donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} (P_n.w_{3,x} - 1) = P_n.(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x}) + (-1)^x$$

D'où

$$\varepsilon_{n,x} - (-1)^x = P_n.[(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x})]$$

avec $[(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x})]$ un nombre entier.

Pour conclure :

Pour w_3 un nombre entier non fixé, nous avons toujours :

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 + (-1)^x \quad \text{pour tout } P_n \in \mathbb{P} \text{ et pour tout } x \geq 1.$$

Rappelons que nous avons noté :

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

Nous avons donc pour $x \geq 1$:

$$\frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} - (-1)^x = P_n \cdot w_3$$

De la même manière pour :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}} \\ &= \frac{(M^x - 1)!}{M \cdot M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x\right)}} \end{aligned}$$

- Nous avons un premier cas si $M = P_n$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n \cdot P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} \\ &= \frac{\varepsilon_{n,x}}{P_n} \quad (\text{autrement dit un nombre rationnel}) \end{aligned}$$

Et d'après ce que nous venons de voir :

pour $x = 1$, $\varepsilon_{n,x}$ équivaut au cas du théorème de WILSON tel que $\varepsilon_{n,1} = P_n \cdot w_1 - 1$ (avec w_1 un nombre entier)

Et de manière générale, si x est impaire :

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 - 1 \quad (\text{avec } w_3 \text{ un nombre entier})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 - 1/P_n$$

Et si x est paire :

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 + 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 + 1/P_n$$

Pour $M = P_n$, nous avons donc toujours :

$$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 \pm 1/P_n$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \sin(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) &= \sin[\pi \cdot (w_3 \pm 1/P_n)] \\ \sin(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) &= \pm \sin(\pi/P_n) \\ \sin^2(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) &= \sin^2(\pi/P_n) \end{aligned}$$

Et donc, pour $M = P_n$:

$$\frac{\sin^2(\pi \cdot \varepsilon_{M,x})}{\sin^2(\pi/P_n)} = 1$$

- Nous avons un second cas si M est un entier tel que $M \neq P_n$:

Nous avons déjà vu que dans ce cas $\varepsilon_{M,x}$ valait un nombre entier.
Autrement dit :

$$\sin(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) = 0$$

Et donc (avec la formule utilisée au cas précédent, c'est-à-dire le cas de $M = P_n$)

$$\frac{\sin^2(\pi \cdot \varepsilon_{M,x})}{\sin^2(\pi/M)} = 0 \text{ (pour } M \neq P_n)$$

- En conclusion, nous sommes capables de construire la fonction Cc sur le constat de la divisibilité de $\varepsilon_{M,x}$. Rappelons que :

$$Cc = \frac{1}{\sin^2(\pi/M)}$$

Constatons que nous nous sommes rapprochés de la forme finale de la fonction F_p .

2.2.3 Construction de la fonction F_p

Pour accéder à la solution, nous allons devoir faire des rappels ou réécrire sous une autre forme ce qui peut se déduire de la construction d'un tableau comme le tableau de référence *T.R.2*. Tenons compte des remarques préalables faites en début de partie “**2.2 Démonstration Complète**” (page 45).

- Rappels :

—○ **Règle n°1 :** Sur l'intervalle $[1; P_n^x - 1]$, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x - 1)$:

Il existe $(P_n^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$,

dont la répartition de chaque multiples de $P_n^{(k+1)}$ est régulière

puisque l'écart entre 2 de ces multiples vaut $P_n^{(k+1)}$.

—○ **Règle n°2 :** il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$[(t - 1).P_n^x + 1; t.P_n^x - 1] \quad \text{pour } t \in \mathbb{N}, t \geq 1,$$

Et il existe des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^x}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^x}{2}; P_n^x - 1\right]$$

—○ **Règle n°3 :** Sur l'intervalle $[1 + r; P_n^x + r]$, pour $r \in \mathbb{N}$:

la quantité des nombres N pouvant être multiples de P_n vaut toujours

$P_n^{(x-1)}$ pour un écart de $(P_n^x - 1)$ entre les 2 bornes de l'intervalle.

• Etude :

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1).(N-2).(N-3). \dots .[N-(P_n^x-1)] \end{aligned}$$

Nous pouvons mettre en valeur essentiellement 2 cas intéressants :

Le cas où $N \neq t.P_n^x$ et le cas où $N = t.P_n^x$ (pour $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$).

• Résolution partielle :

Pour $N < P_n^x$ (à inclure dans le cas où $N \neq t.P_n^x$), nous avons

$$2 \leq N \leq (P_n^x - 1)$$

(évidemment, cette inégalité est valable pour tout P_n sauf si $P_n = 2$ et $x = 1$ où nous avons $N = P_n = 2$, donc N multiple de P_n , et donc à exclure de notre cas de toutes façons)

nous avons donc $F_p = 0$, et donc

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = 0 \quad (\text{un nombre entier})$$

Pour $N = P_n^x$, nous avons :

(à inclure dans le cas où $N = t.P_n^x$ avec $t = 1$ et $r = 0$)

nous retrouvons $F_p = (P_n^x - 1)!$

Donc

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x}}{P_n} \quad (\text{avec toutes les propriétés de } \varepsilon_{n,x} \text{ vues précédemment})$$

Or, $\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 \pm 1$ (avec w_3 un nombre entier)

Et donc

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = w_3 \pm \frac{1}{P_n}$$

Pour poursuivre l'étude, il nous faudra réécrire les règles que nous venons de revoir (en "*Rappels*") afin de pouvoir traiter les données.

Pour traiter le cas où $N \neq t \cdot P_n^x$ et le cas où $N = t \cdot P_n^x$, nous allons devoir mener la suite de l'étude sur des intervalles afin de réduire les étapes. Nous allons devoir considérer comme précédemment que :

$$N = t \cdot P_n^x + r \quad \text{pour } r \geq 0$$

D'où

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x + r - h) \\ &= (t \cdot P_n^x + r - 1) \cdot (t \cdot P_n^x + r - 2) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^x + r - (P_n^x - 1)] \\ &= (t \cdot P_n^x + r - 1) \cdot (t \cdot P_n^x + r - 2) \cdot \dots \cdot [(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1] \end{aligned}$$

Où nous observons clairement que le calcul sera à traiter pour un produit de nombres entiers consécutifs appartenant à l'intervalle :

$$[(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1; t \cdot P_n^x + r - 1] \quad \text{dont la longueur vaut } (P_n^x - 2).$$

De manière simple, pour $t = 1$ et $r = 1$ (à inclure dans le cas où $N \neq t.P_n^x$), nous avons :

$$\begin{aligned} Fp &= (P_n^x).(P_n^x - 1).(P_n^x - 2). \dots .(3).(2) \\ &= (P_n^x).(P_n^x - 1).(P_n^x - 2). \dots .(3).(2).(1) \\ &= (P_n^x)! \end{aligned}$$

Or,

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}. \varepsilon_{n,x} \quad (\text{avec } \varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n)$$

D'où

$$\begin{aligned} (P_n^x)! &= (P_n^x - 1)!.(P_n^x) \\ &= P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}\right)}. \varepsilon_{n,x} \end{aligned}$$

Donc, ici

$$\begin{aligned} \frac{F_p}{P_n^{F_c}} &= \frac{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}\right)}}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}}. \varepsilon_{n,x} \\ &= P_n^{(x-1)}. \varepsilon_{n,x} \quad (\text{qui est un nombre entier pour } x \geq 1 \text{ et pour } r = 1) \end{aligned}$$

• Fin de la résolution partielle, suite du raisonnement :

Afin d'étudier les 2 cas de $N \neq t.P_n^x$ et de $N = t.P_n^x$, notons donc de manière générale :

$$N = t.P_n^x + r \quad (\text{avec } r \in \mathbb{N}, r \geq 0).$$

afin de traiter plus rapidement ces 2 cas, constatons simplement que :

$$\begin{array}{ll} N = t.P_n^x & \text{si } r = 0 \\ N \neq t.P_n^x & \text{si } r \text{ est restreint à l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \end{array}$$

En effet, dans ce dernier cas, toutes les valeurs de N non multiples de P_n sont atteintes pour :

$$t = 1 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [P_n^x + 1; 2.P_n^x - 1]$$

$$t = 2 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [2.P_n^x + 1; 3.P_n^x - 1]$$

$$t = 3 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [3.P_n^x + 1; 4.P_n^x - 1]$$

$$t = 4 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [4.P_n^x + 1; 5.P_n^x - 1]$$

...

etc, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ et r variant sur $[1; P_n^x - 1]$, il ne manque que le cas où $2 \leq N \leq (P_n^x - 1)$ qui a déjà été traité au début de la "résolution partielle".

$$\text{Pour } F_p = (N - 1).(N - 2).(N - 3). \dots .[N - (P_n^x - 1)]$$

$$\text{Et } N = t.P_n^x + r \quad (\text{avec } r \in \mathbb{N}, r \geq 0),$$

cela revient à traiter le problème sur des intervalles de type :

$$[(t - 1).P_n^x + r + 1; t.P_n^x + r - 1]$$

Nous garderons les mêmes notations pour le reste de la démonstration.

- Cas où $N = t.P_n^x$ (et donc $r = 0$) :

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t.P_n^x - h) \\
 &= (t.P_n^x - 1).(t.P_n^x - 2). \dots .[(t-1).P_n^x + 1]
 \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à une étude sur les intervalles du type :

$$[(t-1).P_n^x + 1; t.P_n^x - 1]$$

D'après la Règle n°1, dans le cas de $t = 1$, et pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$:

Il existe $(P_n^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$.

Or, d'après la Règle n°2, il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles de ce type quelquesoit t . D'après la Règle n°2, nous avons des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^x}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^x}{2}; P_n - 1\right]$$

Ce qui revient à écrire que nous avons des symétries aussi entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^{(x+1)}}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^{(x+1)}}{2}; P_n^{(x+1)} - 1\right]$$

d'où nous déduisons que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$ et sur les intervalles du type :

$$[(t-1).P_n^{(x+1)} + 1; t.P_n^{(x+1)} - 1]$$

il existe $(P_n^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$,

c'est-à-dire autant que sur l'intervalle $[1; P_n^x - 1]$

Or, sur cet intervalle, nous avons $t = 1$, ce qui correspond à :

$$(P_n^x - 1)! = P_n \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right)^{-x} \cdot \varepsilon_{n,x} \quad (\varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n).$$

Donc, nous avons maintenant pour tout $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t.P_n^x - h) \\
 &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)} . \varepsilon_{n,x,t} \quad (\text{avec } \varepsilon_{n,x,t} \text{ un nombre entier non divisible par } P_n)
 \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x,t}}{P_n} \quad \text{qui est un nombre rationnel.}$$

Sur le modèle de la fin du paragraphe “*Suite 1 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$* ” pour $\varepsilon_{n,x}$, nous allons réécrire $\varepsilon_{n,x,t}$ sous une autre forme.

Pour retrouver $\varepsilon_{n,x,t}$, nous éliminons tous les facteurs P_n de chaque terme multiple de P_n . Ceci nous permet d’observer des “trous” à la place des multiples de P_n dont la valeur est un “reste” non divisible par P_n . Nous obtenons donc ce qui suit (produits étalés sur plusieurs pages, et ligne par ligne avec des séparations sous forme de tirets rouges correspondants à des groupes de termes identiques pour les égalités qui vont suivre) : (*voir page suivante*)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} = & \begin{aligned} & [t.P_n^x - P_n^x + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^x - P_n^x + P_n - 1] \\ & .[t.P_n^x - P_n^x + P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^x - P_n^x + 2P_n - 1] \\ & .[t.P_n^x - P_n^x + 2P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^x - P_n^x + 3P_n - 1] \\ & .[t.P_n^x - P_n^x + 3P_n + 1]. \quad \dots \quad .(\dots). \quad \dots \quad .[t.P_n^x - 1] \end{aligned} \\
& \text{-----} \\
& \begin{aligned} & .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + P_n - 1] \\ & .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 2P_n - 1] \\ & .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 2P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 3P_n - 1] \\ & .[t.P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 3P_n + 1]. \quad \dots \quad .(\dots). \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-1)} - 1] \end{aligned} \\
& \text{-----} \\
& \begin{aligned} & .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + P_n - 1] \\ & .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 2P_n - 1] \\ & .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 2P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 3P_n - 1] \\ & .[t.P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 3P_n + 1]. \quad \dots \quad .(\dots). \quad \dots \quad .[t.P_n^{(x-2)} - 1] \end{aligned} \\
& \text{-----} \\
& . \quad \dots \\
& \text{-----} \\
& \begin{aligned} & .[t.P_n^3 - P_n^3 + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^3 - P_n^3 + P_n - 1] \\ & .[t.P_n^3 - P_n^3 + P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^3 - P_n^3 + 2P_n - 1] \\ & .[t.P_n^3 - P_n^3 + 2P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^3 - P_n^3 + 3P_n - 1] \\ & .[t.P_n^3 - P_n^3 + 3P_n + 1]. \quad \dots \quad .(\dots). \quad \dots \quad .[t.P_n^3 - 1] \end{aligned} \\
& \text{-----} \\
& \begin{aligned} & .[t.P_n^2 - P_n^2 + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^2 - P_n^2 + P_n - 1] \\ & .[t.P_n^2 - P_n^2 + P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^2 - P_n^2 + 2P_n - 1] \\ & .[t.P_n^2 - P_n^2 + 2P_n + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^2 - P_n^2 + 3P_n - 1] \\ & .[t.P_n^2 - P_n^2 + 3P_n + 1]. \quad \dots \quad .(\dots). \quad \dots \quad .[t.P_n^2 - 1] \end{aligned} \\
& \text{-----} \\
& .[t.P_n^1 - P_n^1 + 1]. \quad \dots \quad .[t.P_n^1 - P_n^1 + P_n - 1]
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire : (*voir page suivante*)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} = & \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + 1.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + 2.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + 3.P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + (P_n^{(x-1)} - 2).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + (P_n^{(x-1)} - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + P_n^{(x-1)}.P_n - a] \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + 1.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + 2.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + 3.P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + (P_n^{(x-2)} - 2).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + (P_n^{(x-2)} - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)}.P_n - a] \\
& \text{-----}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + 1.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + 2.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + 3.P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + (P_n^{(x-3)} - 2).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + (P_n^{(x-3)} - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + P_n^{(x-3)}.P_n - a]
\end{aligned}$$

$$\cdot \dots$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + 1.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + 2.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + 3.P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + (P_n^2 - 2).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + (P_n^2 - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + P_n^2.P_n - a]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + 1.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + 2.P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + 3.P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + (P_n^1 - 2).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + (P_n^1 - 1).P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + P_n^1.P_n - a] \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^1 + 1.P_n - a]
\end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} &= \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^x + b.P_n - a] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-2)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-1)} + b.P_n - a] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-3)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(x-2)} + b.P_n - a] \\
&\quad \cdot \dots \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^2} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^3 + b.P_n - a] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^1} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^2 + b.P_n - a] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^0} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^1 + b.P_n - a]
\end{aligned}$$

Donc, pour finir, et pour $x \geq 1$, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a]$$

Implicitement : a, b, c, t et x sont des nombres entiers ≥ 1 . Il nous reste à exprimer la divisibilité de $\varepsilon_{n,x,t}$ par P_n .

Comme dans la partie “*Suite 2 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$* ” (qui servira de modèle), ici aussi, nous allons simplifier les développements pour écourter les démonstrations. C’est-à-dire que nous n’écrirons pas les développements en polynôme comme nous le devrions, mais nous allons simplifier leur écriture en factorisant les termes les plus significatifs pour résoudre notre problème.

Rappelons que nous avons noté, d’après le théorème de WILSON :

$$(P_n - 1)! = P_n \cdot w_1 - 1 \quad (\text{avec } w_1 \text{ un nombre entier}).$$

Décomposons la suite de cette étude en plusieurs sous-parties.

* **Sous-Partie 1 :**

$$\text{Etudions} \quad \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a]$$

Nous observons encore ici principalement 2 cas : Le cas où P_n est paire et le cas où P_n est impaire.

Cas de P_n paire :

Le seul cas possible étant $P_n = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] &= \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - a] \\ &= (t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - 1 \\ &= 2 \cdot [(t-1) \cdot 2^{(c-1)} + b] - 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \left\{ \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - a] \right\} + 1 = 2 \cdot [(t-1) \cdot 2^{(c-1)} + b]$$

Or, nous avons construit c de sorte qu’il soit un entier ≥ 1 , donc $[(t-1) \cdot 2^{(c-1)} + b]$ est un nombre entier, et donc

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - a] \right\} + 1 \quad \text{est divisible par le nombre premier } 2.$$

Cas de P_n impaire :

$$\begin{aligned}
& \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] \\
&= [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n].f[(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n] + (P_n - 1)! \\
&= P_n.[(t-1).P_n^{(c-1)} + b].f[(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n] + P_n.w_1 - 1 \\
&= P_n.\left\{[(t-1).P_n^{(c-1)} + b].f[(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n] + w_1\right\} - 1
\end{aligned}$$

avec $f[(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n]$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n (dont l'écriture a été ici aussi réduite pour alléger les développements).

Donc

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] \right\} + 1 \quad \text{est divisible par } P_n \text{ impaire.}$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ (c'est-à-dire pour P_n paire et impaire) :

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] \right\} + 1 \quad \text{divisible par } P_n.$$

* **Sous-Partie 2 :**

Notons (pour simplifier) :

$$\left\{ [(t-1).P_n^{(c-1)} + b].f[(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n] + w_1 \right\} = w_{4,c}$$

(avec $w_{4,c}$ un nombre entier)

Nous avons :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] = P_n.w_{4,c} - 1$$

Etudions :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a]$$

Ici aussi, nous pouvons distinguer les cas de P_n paire et de P_n impaire.

Cas de P_n paire :

Le seul cas étant $P_n = 2$, nous avons

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] = \prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1)$$

Or, $2^{(c-1)}$ est un nombre impair pour $c = 1$, et un nombre pair pour $c > 1$.
En développant ce produit, nous obtenons :

Pour $c = 1$

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1) = 2.w_{4,c} - 1$$

Et pour $c > 1$

$$\begin{aligned} \prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1) &= (2.w_{4,c}).f(2.w_{4,c}) + 1 \\ &= (2.w_{4,c}).f(2.w_{4,c}) + 2 - 1 \\ &= 2.[(w_{4,c}).f(2.w_{4,c}) + 1] - 1 \end{aligned}$$

Ce qui fera le lien avec le cas de P_n impaire (avec $f(2.w_{4,c})$ un nombre entier en fonction de 2 et de $w_{4,c}$).

Nous avons donc pour tout $c \geq 1$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1) \right] + 1 \quad \text{divisible par le nombre premier 2.}$$

Cas de P_n impaire :

Ce cas concerne tous les autres nombres premiers (et pour $c \geq 1$).

$$\begin{aligned} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] &= \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} (P_n.w_{4,c} - 1) \\ &= P_n.(w_{4,c}).f(P_n.w_{4,c}) - 1 \end{aligned}$$

(avec $f(P_n.w_{4,c})$ un nombre entier en fonction de P_n et de $w_{4,c}$)

Donc

$$\left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} (P_n.w_{4,c} - 1) \right] + 1 \quad \text{est divisible par } P_n \text{ impaire.}$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $c \geq 1$:

$$\left\{ \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a] \right\} + 1 \quad \text{est divisible par } P_n.$$

* **Sous-Partie 3 :**

Voici la dernière étape. Etudions ce qui suit :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).P_n^{(c)} + b.P_n - a]$$

Nous avons noté

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} (P_n.w_{4,c} - 1) = P_n.(w_{4,c}).f(P_n.w_{4,c}) - 1$$

Toujours pour alléger la lecture, notons :

$$(w_{4,c}).f(P_n.w_{4,c}) = w_{5,x} \quad (\text{avec } w_{5,x} \text{ un nombre entier})$$

Nous avons :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} (P_n.w_{5,x} - 1) = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x}) - 1 \quad \text{si } x \text{ est impaire,}$$

Et

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} (P_n.w_{5,x} - 1) = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x}) + 1 \quad \text{si } x \text{ est paire,}$$

avec $f(P_n.w_{5,x})$ un nombre entier (en fonction de P_n et de $w_{5,x}$).

Et donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} (P_n.w_{5,x} - 1) = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x}) + (-1)^{(x)}$$

D'où

$$\varepsilon_{n,x,t} - (-1)^{(x)} = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x})$$

avec $[(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x})]$ un nombre entier.

Pour conclure :

Pour w_6 un nombre entier non fixé, pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour tout x et $t \in \mathbb{N}$, tel que $x \geq 1$ et $t \geq 1$, nous avons toujours :

$$\varepsilon_{n,x,t} = P_n.w_6 + (-1)^{(x)}$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit ainsi :

$$\varepsilon_{n,x,t} - (-1)^{(x)} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Rappelons que nous avons noté :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x,t}}{P_n} \quad \text{qui est un nombre rationnel } (\varepsilon_{n,x,t} \text{ non divisible par } P_n)$$

En remplaçant $\varepsilon_{n,x,t}$ convenablement dans cette dernière expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{F_P}{P_n^{F_c}} &= \frac{P_n \cdot w_6 + (-1)^{(x)}}{P_n} \\ &= w_6 + \frac{(-1)^{(x)}}{P_n} \end{aligned}$$

Donc, de manière générale, si x est impaire :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = w_6 - \frac{1}{P_n}$$

Et si x est paire :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = w_6 + \frac{1}{P_n}$$

Pour le cas où $N = t \cdot P_n^x$, Nous avons donc toujours :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = w_6 \pm \frac{1}{P_n}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi \cdot F_P}{P_n^{F_c}} \right) &= \sin \left[\pi \cdot \left(w_6 \pm \frac{1}{P_n} \right) \right] \\ &= \pm \sin \left(\frac{\pi}{P_n} \right) \\ \Rightarrow \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_P}{P_n^{F_c}} \right) &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right) \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_P}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 1$$

• Cas où $N \neq t.P_n^x$:

Nous avons noté $N = t.P_n^x + r$ pour $t \geq 1$ et $r \geq 0$. Rappelons que le cas de $r = 0$ pour tout t , et celui de $r = 1$ pour $t = 1$ ont déjà été traités en début de partie “**2.2.3 Construction de la fonction F_p** ” (page 91).

Et nous avons noté :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t.P_n^x + r - h) \quad \text{pour } r \text{ variant sur } [1; P_n^x - 1] \\ &= (t.P_n^x + r - 1).(t.P_n^x + r - 2). \quad \dots \quad .[(t - 1).P_n^x + r + 1] \end{aligned}$$

Sur les intervalles de type $[(t - 1).P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t.P_n^x + r - 1]$, le nombre de multiples de P_n est variable en fonction de r . Sur ces intervalles et selon r , nous recontrerons des cas où le nombre de multiples de P_n est minimum et des cas où il est maximum. Nous allons d’abord traiter les cas où le nombre de multiples de P_n est minimum pour simplifier la suite de l’étude.

Pour r variant sur $[1; P_n^x - 1]$, le nombre de multiples de P_n est minimum lorsque la différence entre la borne inférieure et le premier multiple de P_n de l’intervalle, et la différence entre la borne supérieure et le dernier multiple de P_n de l’intervalle sont toutes les 2 maximums. Recherchons quand ces différences sont maximums en plusieurs sous-parties, toujours à propos du cas où $N \neq t.P_n^x$.

Notons d et $d' \in \mathbb{N}$, tel que $d \geq 1$ et $d' \geq 1$.

* Sous-partie pour les multiples de P_n :

A propos des bornes des intervalles de type $[(t-1).P_n^x + r + 1 ; t.P_n^x + r - 1]$ et des différences évoquées dans les quelques lignes précédentes pour ce cas ($N \neq t.P_n^x$).

Relation entre la borne inférieure et le premier multiple de P_n des intervalles de ce type :

$$(t-1).P_n^x + r + 1 < (t-1).P_n^x + d.P_n$$

Relation entre la borne supérieure et le dernier multiple de P_n des intervalles de ce type :

$$t.P_n^x - d'.P_n < t.P_n^x + r - 1$$

Or, en notant Δ_1 cette différence, nous avons la plus grande différence possible pour $\Delta_1 = P_n - 1$, puisque cette différence est le nombre entier le plus grand ne contenant pas de multiple de P_n . Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [(t-1).P_n^x + d.P_n] - [(t-1).P_n^x + r + 1] \\ &= d.P_n - r - 1 \\ &= P_n - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (d-1).P_n \end{aligned}$$

et pour la seconde borne

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [t.P_n^x + r - 1] - [t.P_n^x - d'.P_n] \\ &= d'.P_n + r - 1 \\ &= P_n - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (1 - d').P_n \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} r &= (d-1).P_n \\ &= (1 - d').P_n \\ \text{D'où} \quad d' &= 2 - d \end{aligned}$$

Finalement, si $r = (d - 1).P_n$,

le premier multiple de P_n vaut $(t - 1).P_n^x + d.P_n$

et le dernier multiple de P_n vaut $t.P_n^x + (d - 2).P_n$

Or, le nombre de multiples de P_n se trouvant sur les intervalles de type $[(t - 1).P_n^x + d.P_n ; t.P_n^x + (d - 2).P_n]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$$[P_n ; P_n.(P_n^{(x-1)} - 1)]$$

Et donc le nombre de multiples de P_n vaut $(P_n^{(x-1)} - 1)$, dont P_n^x est un multiple appartenant à ces intervalles car pour r variant sur $[1; P_n^x - 1]$ dans les intervalles de type $[(t - 1).P_n^x + r + 1 ; t.P_n^x + r - 1]$, nous avons :

$$(t - 1).P_n^x + r + 1 \leq t.P_n^x \leq t.P_n^x + r - 1$$

En effet, puisque pour $r = 1$, l'inégalité devient :

$$(t - 1).P_n^x + 2 \leq t.P_n^x \leq t.P_n^x$$

Et pour $r = P_n^x - 1$, l'inégalité devient :

$$t.P_n^x \leq t.P_n^x \leq (t + 1).P_n^x - 2$$

* Sous-partie pour les multiples de P_n^2 :

Même raisonnement que précédemment appliqué aux multiples de P_n^2 .

$$(t-1).P_n^x + r + 1 < (t-1).P_n^x + d.P_n^2$$

Et

$$t.P_n^x - d'.P_n^2 < t.P_n^x + r - 1$$

Or, $\Delta_2 = P_n^2 - 1$ ne contient pas de multiple de P_n^2 et est la plus grande différence possible. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= [(t-1).P_n^x + d.P_n^2] - [(t-1).P_n^x + r + 1] \\ &= d.P_n^2 - r - 1 \\ &= P_n^2 - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (d-1).P_n^2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= [t.P_n^x + r - 1] - [t.P_n^x - d'.P_n^2] \\ &= d'.P_n^2 + r - 1 \\ &= P_n^2 - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (1-d').P_n^2 \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} r &= (d-1).P_n^2 \\ &= (1-d').P_n^2 \\ \text{D'où} \quad d' &= 2-d \end{aligned}$$

Finalement, si $r = (d - 1).P_n^2$,

le premier multiple de P_n vaut $(t - 1).P_n^x + d.P_n^2$

et le dernier multiple de P_n vaut $t.P_n^x + (d - 2).P_n^2$

Or, le nombre de multiples de P_n^2 se trouvant sur les intervalles de type $[(t - 1).P_n^x + d.P_n^2 ; t.P_n^x + (d - 2).P_n^2]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$$[P_n^2 ; P_n^2.(P_n^{(x-2)} - 1)]$$

Et donc le nombre de multiples de P_n^2 vaut $(P_n^{(x-2)} - 1)$, dont P_n^x fait partie (pour les mêmes raisons que la Sous-partie précédente concernant les multiples de P_n).

...

(même raisonnement pour les multiples des puissances de P_n intermédiaires)

...

* Sous-partie pour les multiples de $P_n^{(x-1)}$:

Même raisonnement que précédemment appliqué aux multiples de $P_n^{(x-1)}$.

$$(t-1).P_n^x + r + 1 < (t-1).P_n^x + d.P_n^{(x-1)}$$

Et

$$t.P_n^x - d'.P_n^{(x-1)} < t.P_n^x + r - 1$$

Or, $\Delta_{(x-1)} = P_n^{(x-1)} - 1$ ne contient pas de multiple de $P_n^{(x-1)}$ et est la plus grande différence possible. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_{(x-1)} &= [(t-1).P_n^x + d.P_n^{(x-1)}] - [(t-1).P_n^x + r + 1] \\ &= d.P_n^{(x-1)} - r - 1 \\ &= P_n^{(x-1)} - 1 \\ \text{Donc } r &= (d-1).P_n^{(x-1)} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \Delta_{(x-1)} &= [t.P_n^x + r - 1] - [t.P_n^x - d'.P_n^{(x-1)}] \\ &= d'.P_n^{(x-1)} + r - 1 \\ &= P_n^{(x-1)} - 1 \\ \text{Donc } r &= (1-d').P_n^{(x-1)} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} r &= (d-1).P_n^{(x-1)} \\ &= (1-d').P_n^{(x-1)} \\ \text{D'où } d' &= 2-d \end{aligned}$$

Finalement, si $r = (d - 1).P_n^{(x-1)}$,

le premier multiple de P_n vaut $(t - 1).P_n^x + d.P_n^{(x-1)}$

et le dernier multiple de P_n vaut $t.P_n^x + (d - 2).P_n^{(x-1)}$

Or, le nombre de multiples de $P_n^{(x-1)}$ se trouvant sur les intervalles de type $[(t - 1).P_n^x + d.P_n^{(x-1)} ; t.P_n^x + (d - 2).P_n^{(x-1)}]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$$[P_n^{(x-1)} ; P_n^{(x-1)}. (P_n - 1)]$$

Et donc le nombre de multiples de $P_n^{(x-1)}$ vaut $(P_n - 1)$, dont P_n^x fait partie (pour les mêmes raisons que la Sous-partie précédente concernant les multiples de P_n).

* Sous-partie pour les multiples de P_n^x :

Nous avons déjà vu que pour r variant sur $[1; P_n^x - 1]$ dans les intervalles de type $[(t-1).P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t.P_n^x + r - 1]$, nous avons :

$$(t-1).P_n^x + r + 1 \leq t.P_n^x \leq t.P_n^x + r - 1$$

En effet, si $r = 1$:

$$(t-1).P_n^x + 2 \leq t.P_n^x \leq t.P_n^x$$

Et si $r = P_n^x - 1$:

$$t.P_n^x \leq t.P_n^x \leq (t+1).P_n^x - 2$$

Et donc $t.P_n^x$ se situe toujours dans les intervalles de type :

$$[(t-1).P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t.P_n^x + r - 1]$$

* Synthèse :

Pour $N = t.P_n^x + r$ et r variant sur l'intervalle $[1; P_n^x - 1]$, sur les intervalles de type $[(t-1).P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t.P_n^x + r - 1]$:

nous avons donc 1 seul multiple de P_n^x ;

Et pour $k \in \mathbb{N}$ sur l'intervalle $[1; x - 1]$:

au moins $(P_n^{(x-k)} - 1)$ multiples de P_n^k , dont P_n^x fait partie.

(l'intervalle peut même être étendu à $k \in [0; x - 1]$ car l'ensemble reste cohérent, même si $k = 0$ ne présente a priori pas d'intérêt).

Nous pouvons donc regrouper chacun de ces nombres minimum de multiples des puissance de P_n à partir de ce que nous venons de voir (en notant E un nombre entier non divisible par P_n) :

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t.P_n^x + r - h) \\
 &= P_n^{(P_n^{(x-1)}-1)} . P_n^{(P_n^{(x-2)}-1)} . \quad \dots \quad . P_n^{(P_n^2-1)} . P_n^{(P_n-1)} . P_n^{(1)} . E \\
 &= P_n^{[P_n^{(x-1)}-1+P_n^{(x-2)}-1+ \quad \dots \quad +P_n^2-1+P_n-1+1]} . E \\
 &= P_n^{[P_n^{(x-1)}+P_n^{(x-2)}+ \quad \dots \quad +P_n^2+P_n-(x-1)+1]} . E \\
 &= P_n^{[P_n^{(x-1)}+P_n^{(x-2)}+ \quad \dots \quad +P_n^2+P_n+1-(x-1)]} . E
 \end{aligned}$$

Or,

$$P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} + \quad \dots \quad + P_n^2 + P_n + 1 = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}$$

Donc, dans notre cas :

$$\begin{aligned}
 F_p &= P_n^{\left[\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-(x-1)\right]} . E \\
 &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)} . E
 \end{aligned}$$

Et comme nous avons :

$$P_n^{F_c} = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}$$

Nous pouvons effectuer

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = E$$

$\frac{F_p}{P_n^{F_c}}$ est donc toujours un nombre entier pour $x \geq 1$, nous avons donc ici :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 0$$

REMARQUE IMPORTANTE :

Le fait d'avoir chercher à regrouper ces nombres minimum de multiples des puissance de P_n dans la formule de F_p nous permet d'abréger ici l'étude les concernant. En effet, les autres cas de r faisant intervenir un nombre plus important de multiples des puissance de P_n dans la formule de F_p , nous aurons forcément :

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = E'$$

c'est-à-dire un nombre entier E' divisible par une puissance de P_n , une puissance obligatoirement ≥ 1 .

Et donc, nous retrouvons ici aussi :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 0$$

Ce qui permet de conclure de manière générale à propos du cas où $N \neq t.P_n^x$ ainsi :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{P_n^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right)} = 0$$

Conclusion et synthèse :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{P_n^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right)} = 1 \text{ si } N \text{ est un multiple de } P_n^x.$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{P_n^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right)} = 0 \text{ si } N \text{ n'est pas un multiple de } P_n^x.$$

2.2.4 Supposons P_n non connu (construction de F_p , suite)

Supposons que nous ne connaissions pas les nombres premiers P_n . Comme $P_n \in \mathbb{P}$, remplaçons P_n dans la formule de F_p par une autre variable M , définie telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Nous verrons pourquoi $M \geq 2$ en cours d'étude. Reprenons brièvement les points essentiels des études précédentes en se concentrant uniquement sur les cas où M n'est pas un nombre premier (car les cas où $M = P_n$ ont tous été traité dans les études précédentes).

Nous avons noté :

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h) \\
 &= (N-1).(N-2). \dots .(N-P_n^x+2).(N-P_n^x+1) \\
 &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right). \varepsilon_{n,x,t}} \quad (\text{avec } \varepsilon_{n,x,t} \text{ un nombre entier non divisible par } P_n)
 \end{aligned}$$

Et

$$P_n^{F_c} = P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}$$

En remplaçant P_n par M nous obtenons :

$$F_p = \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)$$

Et

$$M^{F_c} = M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}$$

Et donc $\frac{F_p}{P_n^{F_c}}$ devient $\frac{F_p}{M^{F_c}}$, pour finalement obtenir :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}$$

A partir de cette égalité, reprenons l'étude en 3 nouvelles sous-parties.

• **Etude :**

* **Sous-Partie 1 :**

$$1 < N < M^x$$

C'est un cas simple . En effet, nous avons ici :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1).(N-2).....(N-M^x+2).(N-M^x+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc ici

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = 0$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi.F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

* **Sous-Partie 2 :**

$$N = M^x$$

C'est aussi un cas simple . En effet, puisque nous retrouvons ici :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h) \\ &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (M^x - h) \\ &= (M^x - 1)! \end{aligned}$$

dont la démonstration a déjà été faite, rappelons donc que nous avons :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1} - x + 1\right)}}$$

avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier pour tout M étant un nombre entier et n'étant pas un nombre premier, sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$.

Donc, ici

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \varepsilon_{M,x} \quad (\varepsilon_{M,x} \text{ entier sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Nous pourrions corriger cela en donnant une formule valable pour tous les cas (et donc pour $M = 4$ et $x = 1$ inclus). Nous chercherons alors une formule qui soit nulle pour ce seul cas (ou au moins pour les multiples de 4) et qui prenne pour valeur 1 sinon (ou au moins lorsque $M = P_n$), ceci afin de ne pas perturber le fonctionnement général de la formule finale. Nous donnerons une étude plus détaillée de la cette fonction de correction “ A ” plus loin dans le paragraphe le signalant.

* Sous-Partie 3 :

$$N > M^x$$

C'es le cas le moins simple. Raisonnement :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1).(N-2).....(N-M^x+2).(N-M^x+1) \end{aligned}$$

Remarquons que dans ce cas il existe une différence non nulle entre N et M^x , notons cette différence Λ telle que :

$$\Lambda = N - M^x \quad (\text{et donc non nulle, c'est-à-dire } \Lambda \geq 1)$$

D'où

$$N = M^x + \Lambda$$

Donc

$$\begin{aligned} F_p &= (N-1).(N-2). \quad \dots \quad .(N-M^x+2).(N-M^x+1) \\ &= (N-1).(N-2). \quad \dots \quad .(\Lambda+2).(\Lambda+1) \\ &= [(N-1).(N-2). \quad \dots \quad .(\Lambda+2).(\Lambda+1)]. \frac{\Lambda!}{\Lambda!} \\ &= \frac{(N-1)!}{\Lambda!} \\ &= \frac{(M^x + \Lambda - 1)!}{\Lambda!} \\ &= \frac{[(M^x + \Lambda - 1).(M^x + \Lambda - 2). \quad \dots \quad .(M^x + 1).(M^x)]}{\Lambda!} \quad . \quad [(M^x - 1)!] \\ &= [(M^x - 1)!] \quad . \quad \frac{[(M^x + \Lambda - 1).(M^x + \Lambda - 2). \quad \dots \quad .(M^x + 1).(M^x)]}{\Lambda!} \\ &= (M^x - 1)! . \frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!} \end{aligned}$$

Or,
$$\frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!}$$
 est toujours un nombre entier.

Explications :

Notons $G = \prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda')$

Donc

$$\frac{G}{\Lambda!} = \frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!}$$

Si $\Lambda = 1$, alors $G = M^x$ divisible par $(\Lambda!) = 1! = 1$. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 2$, alors $G = (M^x).(M^x + 1)$ divisible par $(\Lambda!) = 2!$ puisque sur 2 nombre entiers consécutifs, au moins l'un des 2 est divisible par 2 (et forcément l'autre est divisible par 1). Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 3$, alors $G = (M^x).(M^x + 1).(M^x + 2)$ divisible par $(\Lambda!) = 3!$ puisque sur 3 nombre entiers consécutifs, au moins l'un des 3 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 4$, alors $G = (M^x).(M^x + 1).(M^x + 2).(M^x + 3)$ divisible par $(\Lambda!) = 4!$ puisque sur 4 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 4 est divisible par 4, au moins un des 4 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 5$, alors $G = (M^x).(M^x + 1).(M^x + 2).(M^x + 3).(M^x + 4)$ divisible par $(\Lambda!) = 5!$ puisque sur 5 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 5 est divisible par 5, au moins un des 5 est divisible par 4, au moins un des 5 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

...

(nous pouvons poursuivre ce raisonnement à l'infini pour chaque valeur de Λ)

...

Pour $\Lambda \geq 1$, nous avons $G = (M^x).(M^x+1). \dots .(M^x+\Lambda-2).(M^x+\Lambda-1)$ divisible par $(\Lambda!)$ puisque sur Λ nombres entiers consécutifs, au moins l'un des Λ nombres est divisible par Λ , au moins un des Λ nombres est divisible par $(\Lambda-1)$, au moins un des Λ nombres est divisible par $(\Lambda-2)$, ... , au moins un des Λ nombres est divisible par 3 et au moins un autre parmi ces Λ nombres est divisible par 2 (et forcément l'ensemble de ces Λ nombres est divisible par 1). Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

En notant $\frac{G}{\Lambda!} = G'$ un nombre entier quelquesoit $\Lambda \geq 1$, nous avons donc maintenant :

$$\begin{aligned} F_p &= (M^x - 1)! \cdot \frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!} \\ &= (M^x - 1)! \cdot G' \end{aligned}$$

En rappelant que

$$\begin{aligned} (M^x - 1)! &= M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)} \cdot \varepsilon_{M,x} \\ &= M^{F_c} \cdot \varepsilon_{M,x} \end{aligned}$$

Nous déduisons

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = G' \cdot \varepsilon_{M,x} \quad (\varepsilon_{M,x} \text{ entier sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

* **Synthèse de ces 3 sous-parties :**

Nous avons donc pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ avec tout $M \notin \mathbb{P}$ et quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

• **Conclusion et synthèse :**

Nous avons pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ tel que $M \notin \mathbb{P}$ et quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et nous avons pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ tel que $M \in \mathbb{P}$ (c'est-à-dire finalement pour $M = P_n$) :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1 \quad \text{si } N \text{ est un multiple de } P_n^x = M^x.$$

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad \text{si } N \text{ n'est pas multiple de } M^x.$$

• Construction de la “fonction” de Correction “ A ” :

Nous voulons obtenir une “fonction” de correction “ A ” pour le cas où $M = 4$ et $x = 1$ telle que :

pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$

$$A. \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$

$$A. \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

Nous voulons donc

$A = 0$ si $M = 4$ et $x = 1$ (ou si “ M est multiple de 4” est aussi acceptable)
 $A = 1$ sinon (ce qui inclu les cas où $M = P_n$)

En effet, en partant de :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{F_p}{M^{F_c}} \\ &= \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}} \end{aligned}$$

(avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier si $M \notin \mathbb{P}$ sauf dans le cas de $M = 4$ et $x = 1$)

pour $N = M^x$, lorsque $M = 4$ et $x = 1$, nous obtenions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(4 - 1)!}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas seulement, $\varepsilon_{M,x}$ est rationnel alors que $M \notin \mathbb{P}$.

Etudions maintenant ce qui suit :

$$\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} = \frac{M^3 - 6.M^2 + 11.M - 6}{4}$$

Si M est un multiple de 4, notons $M = 4.t'$ avec $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} &= \frac{(4t'-1).(4t'-2).(4t'-3)}{4} \\ &= \frac{(4t')^3 - 6.(4t')^2 + 11.(4t') - 6}{4} \\ &= 16.(t')^3 - 24.(t')^2 + 11.(t') - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Or, $[16.(t')^3 - 24.(t')^2 + 11.(t')]$ est un nombre entier pour $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \sin^2 \left[\frac{\pi.(M-1).(M-2).(M-3)}{4} \right] &= \sin^2 \left[\frac{\pi.(4t'-1).(4t'-2).(4t'-3)}{4} \right] \\ &= \sin^2 \left\{ \pi. \left[16.(t')^3 - 24.(t')^2 + 11.(t') - \frac{3}{2} \right] \right\} \\ &= \sin^2 \left(\frac{3.\pi}{2} \right) \\ &= 1 \quad \text{si } M \text{ est un multiple de 4.} \end{aligned}$$

Si M n'est pas un multiple de 4, notons $M = 4t' + r'$ avec $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$ et $r' \in \mathbb{N}$, nous pouvons restreindre r' à l'intervalle $[1; 3]$ (en effet, toutes les valeurs non multiple de 4 sont présente avec $r' \in [1; 3]$ et pour chaque valeur de t'), nous avons :

$$\begin{aligned}
& \frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} \\
= & \frac{(4t' + r' - 1).(4t' + r' - 2).(4t' + r' - 3)}{4} \\
= & \frac{(4t' + r')^3 - 6.(4t' + r')^2 + 11.(4t' + r') - 6}{4} \\
= & \frac{64.(t')^3 + 52.(t')^2.r' + 12.t'.(r')^3 + (r')^3 - 96.(t')^2 - 48.t'.r' - 6.(r')^2 + 44.t' + 11.r' - 6}{4} \\
= & 16.(t')^3 + 13.(t')^2.r' + 3.t'.(r')^2 - 24.(t')^2 - 12.t'.r' + 11.t' + \frac{(r')^3 - 6.(r')^2 + 11.r' - 6}{4} \\
= & 16.(t')^3 + 13.(t')^2.r' + 3.t'.(r')^2 - 24.(t')^2 - 12.t'.r' + 11.t' + \frac{(r' - 1).(r' - 2).(r' - 3)}{4}
\end{aligned}$$

Or, pour la partie suivante de cette dernière formule :

$[16.(t')^3 + 13.(t')^2.r' + 3.t'.(r')^2 - 24.(t')^2 - 12.t'.r' + 11.t']$ vaut un nombre entier

Et de plus, nous avons :

$$\frac{(r' - 1).(r' - 2).(r' - 3)}{4} = 0 \text{ pour } r' \in \mathbb{N} \text{ et restreint à l'intervalle } [1; 3]$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sin^2 \left[\pi. \frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} \right] &= \sin^2 \left[\pi. \frac{(4t' + r' - 1).(4t' + r' - 2).(4t' + r' - 3)}{4} \right] \\
&= 0 \quad \text{si } M \text{ n'est pas un multiple de 4.}
\end{aligned}$$

Pour faire la synthèse, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] &= 1 \text{ si } M \text{ est multiple de } 4, \\ \sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] &= 0 \text{ si } M \text{ n'est pas multiple de } 4.\end{aligned}$$

Or, nous sommes en train de rechercher une fonction qui est exactement complémentaire à celle-ci puisque nous voulons :

$A = 0$ si M est multiple de 4

$A = 1$ si M n'est pas multiple de 4

Nous avons donc simplement :

$$\begin{aligned}A &= 1 - \sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \\ &= \cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right]\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de généraliser :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est un multiple de M^x :

$$\cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N n'est pas un multiple de M^x :

$$\cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

2.2.5 Construction de la fonction α_M

Toutes ces données vont nous permettre de construire une mécanique pour les puissances des nombres premiers. En effet, pour simplifier les données principales, notons :

$$f(M; x) = \cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Et notons à nouveau ces généralisations précédentes, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$:

$f(M; x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .

$f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x .

$f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Ceci signifie encore que :

$M^{f(M; x)} = M$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .

$M^{f(M; x)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x .

$M^{f(M; x)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Poursuivons avec le cas le plus intéressant pour la suite de l'étude, c'est-à-dire avec le cas où :

$f(M; x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .

Dissociation de variables :

Afin de dissocier un nombre N d'un nombre M^x , nous allons devoir adopter d'autres variables : α_M et g . En effet, nous devons adopter une notation pour N qui le distingue du reste de la formule recherchée. Notons :

$$N = g.M^{(\alpha_M)} \quad \text{avec } g \in \mathbb{N}, g \geq 1 \text{ et } \alpha_M \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, N peut représenter tous les nombres entiers supérieur ou égale à 1 ($N \in \mathbb{N}, N \geq 1$). Effectivement :

- si N est multiple de $M^{(\alpha_M)}$, le coefficient multiplicateur est représenté par g .
- si N n'est pas multiple de $M^{(\alpha_M)}$, alors $\alpha_M = 0$ et donc $N = g$.

En réalité, cette écriture va nous permettre de dissocier α_M et x , afin de constater que le nombre $N = g.M^{(\alpha_M)}$ étant donné et fixé, N est multiple de M^x si $x \leq \alpha_M$, mais aussi N est multiple de M élevé à toutes les puissances inférieures à x ($x \in \mathbb{N}, x \geq 1$).

Nous avons donc

N est multiple de M (pour $x = 1$),
 N est multiple de M^2 (pour $x = 2$),
 N est multiple de M^3 (pour $x = 3$),
...
Jusqu'au cas où N est multiple de M^x (pour $x = \alpha_M$),

 N n'est plus multiple de M^x dès que $x > \alpha_M$.

Tout ceci signifie que dans tous ces cas :

$f(M; 1) = 1$ (pour $x = 1$)
 $f(M; 2) = 1$ (pour $x = 2$)
 $f(M; 3) = 1$ (pour $x = 3$)
...
Jusqu'à $f(M; \alpha_M) = 1$ (pour $x = \alpha_M$)

Et $f(M; x) = 0$ pour $x > \alpha_M$.

Ce qui nous permet de retrouver la puissance α_M puisque nous avons :

$$\begin{aligned} f(M; 1) + f(M; 2) + f(M; 3) + \dots + f(M; \alpha_M) &= \sum_{x=1}^{x=\alpha_M} (1) \\ &= \alpha_M \end{aligned}$$

Ce qui peut encore être écrit :

$$\alpha_M = f(M; 1) + f(M; 2) + \dots + f(M; \alpha_M) + f(M; \alpha_M + 1) + f(M; \alpha_M + 2) + \dots$$

puisque dès que $x > \alpha_M$ et jusqu'à l'infini (pour x), nous avons $f(M; x) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \sum_{x=1}^{x=\alpha_M} (1) \\ &= \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x) \end{aligned}$$

Or, $f(M; x)$ est connue car elle a déjà été formulée. Nous avons finalement une formule de “mécanique des puissances” pour les nombres premiers.

Pour tout nombre $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, nous pouvons déduire α_M la puissance maximum de M (lorsque M est un nombre premier) qui le compose. Ainsi :

$$N = g.M^{(\alpha_M)} \quad \text{avec} \quad \alpha_M = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x)$$

Pour retrouver tous les nombres premiers qui compose N (par exemple en notant q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , ..., q_n des nombres premiers quelconques mais distincts les uns des autres et en supposant que N soit composé du produit de ces nombres), il suffit alors de faire varier M sur l'ensemble des nombres premiers (ainsi, M prend forcément pour valeur q_1 , puis q_2 , puis q_3 , puis q_4 , ..., puis q_n), ce qui permettrait d'obtenir par exemple :

$$N = q_1^{(\alpha_{q_1})}.q_2^{(\alpha_{q_2})}.q_3^{(\alpha_{q_3})}.q_4^{(\alpha_{q_4})}. \dots .q_n^{(\alpha_{q_n})}.$$

Concentrons nous maintenant sur les cas suivant, rappelons que :

Si N n'est pas multiples d'un de ces nombres premiers (d'après l'exemple précédent : q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , ... , q_n), alors $f(M; x) = 0$

donc, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\alpha_M &= \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc $M^{(\alpha_M)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N n'est pas un multiple de M^x .

Et rappelons d'autre part que :

$f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Donc, dans ces 2 derniers cas,

$$\begin{aligned}\alpha_M &= \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc $M^{(\alpha_M)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$.

Or, dans un produit, 1 est l'élément neutre. Ce qui va nous permettre de construire une formule "plus générale" sur la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs de nombres premiers. En tenant compte de toutes ces données, nous pouvons alors conclure finalement :

$$N = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M^{\alpha_M}$$

Nous pouvons borner ce produit par 2 pour la borne inférieure puisqu'il s'agit également de la borne inférieure pour le domaine de définition de M (nous avons $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$). Compte tenu qu'il n'est pas nécessaire de faire varier M jusqu'à l'infini puisque N ne peut pas être composé de facteur premier qui soit supérieur à lui-même. Au maximum, si N est lui-même un nombre premier, nous pouvons faire varier M jusqu'au plus grand nombre premier possible, c'est-à-dire jusqu'à N lui-même. ce qui impose alors de restreindre le domaine de définition de N à celui de M , c'est-à-dire pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Et si nous voulons faire apparaître tous les travaux de l'étude en une seule formule, nous pouvons mettre en facteur les formules de "fonction coefficient correcteur" Cc et de "fonction élimination du défaut" A (lorsque $M = 4$ et $x = 1$) que l'on retrouve dans chaque formule de $f(M; x)$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, nous pouvons alors noter :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h)}{M \left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1 \right)} \right) \right]$$

Ce que je me suis efforcé de démontrer (attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des "valeurs absolues" , ni de ceux des "parties entières" : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses, ils contiennent α_M , c'est-à-dire la puissance de M). Ceci servira de synthèse générale de la démonstration de l'étude sur la factorisation d'un nombre entier en produits de facteurs premiers. Notons simplement ce processus de "décomposition" (ou de factorisation d'un nombre entier en produit de facteurs premiers) $D(N)$, et appelons cette formule $D(N)$ la "Décomposée" de N telle que :

$$\begin{aligned} N &= D(N) \\ &= \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M^{\alpha_M} \\ &= \prod_{M=2}^{M=N} M^{\alpha_M} \end{aligned}$$

Il existe donc une règle permettant la décomposition d'un nombre entier supérieur ou égale à 2 en produit de facteurs premiers. Nous pouvons maintenant considérer que le tableau de référence *T.R.1* (voir le début de la partie “**1 Factorisation et mécanique des puissances**” page 11), dont le nombre de colonnes est infini et dont le nombre de lignes est également infini, peut être donné par la formule $D(N)$ pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.

Remarque 1 :

Lorsque nous notons que nous devons avoir $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, il faut comprendre que tout nombre N est décomposable en produit de facteurs premiers seulement si N est supérieur ou égale à 2. En d'autres termes, les nombres 0 et 1 (les seuls entiers positifs à être inférieurs à 2) ne sont pas décomposables de manière explicite en produit de facteurs premiers, la formule de décomposition $D(N)$ ne peut logiquement pas les concerner.

Autrement dit, la raison pour laquelle les nombres entiers 0 et 1 ne peuvent pas être concernés par cette formule est que cette formule ne traite que la propriété de “primalité” de chaque nombre entier consécutif (par le produit des $(N - h)$), et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, l'entier N ne peut être que premier ou composé (ce qui n'est pas le cas des nombre 0 et 1).

Remarque 2 :

A l'aide des congruences, le lien entre la fonction *SINUS* et le cercle doit pouvoir permettre une interprétation géométrique équivalente.

Remarque 3 :

Il existe une formule “plus générale” de $D(N)$ dont la démonstration et la formule qui en résulte sont données en partie “**3.8.6 Formule $f(M;x)$, puissance et divisibilité : Formule $D(N)$ généralisée**” (page 217).

2.3 Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers

D'après les démonstrations effectuées précédemment à propos de la formule $D(N)$ de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers, pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, la formule $D(N)$ étant donnée par :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M-v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M \left(\frac{M^x-1}{M-1} \right)^{-x+1}} \right) \right]$$

- Soit N le nombre d'éléments d'un ensemble.
- Soit un ***ensemble fondamental*** un ensemble dont le nombre d'éléments contenu est $N \in \mathbb{P}$.
- Soit un ***ensemble composé*** un ensemble dont le nombre d'éléments contenu est $N \notin \mathbb{P}$.

Le domaine de définition de $D(N)$ étant $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, si nous voulons diviser un ensemble composé de N éléments en sous-ensembles fondamentaux, nous devons concevoir :

- qu'il existe une unité de mesure indivisible (évidemment la valeur 1),
- que les éléments (qui permettent de former un ensemble) soient indivisibles,
- qu'il existe une limite minimum pour un sous-ensemble fondamental (ce minimum étant $N = 2$ éléments),
- qu'il n'existe pas de limite maximum pour un sous-ensemble fondamental (sinon, cela sous-entendrait qu'il existe un nombre premier maximum, ce qui est faux),
- que nos mesures à propos du nombre d'éléments (formant un ensemble) ne puissent être que discontinues (correspondant au domaine de définition des nombres entiers \mathbb{N}).

3

Formules courtes

Certaines lettres qui vont être utilisées seront les mêmes que précédemment, mais elles n'auront pas de lien entre elles (exemple pour les variables comme a , comme b , comme m , comme B ou comme X ...). Nous précisons ce changement par une redéfinition des variables concernées.

3.1 Formule simplifiée $s(M)$

- D'après les démonstrations déjà effectuées, nous pouvons construire une formule légèrement différente et plus simple. Par exemple, la formule de α_n nous permet de connaître la divisibilité de N par un nombre premier P_n , ce qui nous amène à connaître $D(N)$. D'une autre manière, nous pouvons savoir par une formule plus "courte" si un nombre entier est premier ou non (c'est-à-dire si $N = P_n$ ou pas). Cette formule courte (ou encore "Simplifiée" de $f(M; x)$) permettra simplement de savoir si le nombre N est divisible ou non par un nombre premier P_n , son expression est basée sur celle de $\alpha_{n,1}$ mais sans certains termes non utiles à cette fin, elle est plus légère que α_n . Quelques rappels de ce que nous avons noté :

$$\alpha_n = A.Cc. \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2 \left(\frac{\pi.F_p}{P_n F_c} \right)$$

$$* \text{ Avec } F_p = \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)$$

$$* \text{ Avec } F_c = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1$$

$$* \text{ Avec } Cc = \frac{1}{\sin^2(\pi/P_n)}$$

$$* \text{ Avec } A = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v) \right)$$

* Avec R_n la fonction de Restriction permettant de limiter les calculs aux nombres premiers $P_n \leq N$.

Il suffit de ramener cette étude à celle de $x = 1$ (et donc à celle de $\alpha_{n,1}$) :

$$S(N) = \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v) \right)}{\sin^2(\pi/P_n)} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \cdot \prod_{h=1}^{h=(P_n-1)} (N-h) \right)$$

(Cette formule nous permet de savoir si N est multiple de P_n)

Ou encore, si nous désirons remplacer P_n par M comme dans la partie précédente (ce qui sous-entend que P_n n'est pas connu) :

$$S(N) = \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \cdot \prod_{h=1}^{h=(M-1)} (N-h) \right)$$

- Rappelons également que nous avons noté :

$$\alpha_M = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x)$$

Avec

$$f(M; x) = \cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Poursuivons le raisonnement de simplification par une remarque utile : dans le cas particulier où $N = M$ (et $x = 1$), nous saurons directement si N (ou M) est premier ou pas.

Dans le cas où $N = M$ (et $x = 1$), nous avons :

$$\prod_{h=1}^{h=M-1} (N - h) = (M - 1)!$$

Dans le cas particulier de $N = M$ et $x = 1$, la formule $f(M; x)$ est simplifiée. Notons $s(M)$ cette formule simplifiée de $f(M; x)$ dans le cas particulier de $N = M$ et $x = 1$. Par la suite, nous appellerons la formule $s(M)$ “la simplifiée de variable M ”. Nous obtenons alors :

$$S(M) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right) \cdot \frac{\sin^2 \left((M - 1)! \cdot \frac{\pi}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s(M) &= 1 \text{ si } M \in \mathbb{P} && \text{(la réciproque est vraie)} \\ s(M) &= 0 \text{ si } M \notin \mathbb{P} && \text{(la réciproque est vraie)} \end{aligned}$$

Et $s(M)$ est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$.

Le complément de $s(M)$ vaut $1 - s(M)$, notons le comme ceci :

$$\overline{s(M)} = 1 - s(M)$$

Remarque 1 :

Nous voyons donc que $s(M)$, la simplifiée de variable M , n'est qu'un cas particulier de la fonction α_M . En effet, la fonction $s(M)$ n'est autre que la fonction α_M dans le cas où $M = N$ et $x = 1$.

Remarque 2 :

La fonction $s(M)$ ne possédant que 2 “états”, c'est-à-dire 0 ou 1, et étant donné qu'élever à la puissance m (pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$) ces 2 nombres revient à effectuer une “opération neutre”, on peut donc conclure que :

$$s(M)^m = s(M)$$

Remarque 3 :

La fonction primorielle P_n (qui est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à $P_n \in \mathbb{P}$) s'écrit :

$$\#P_n = \prod_{M=2}^{M=P_n} (M^{s(M)})$$

Ou encore :

$$\#P_n = \prod_{M=2}^{M=P_n} [1 + (M - 1) \cdot s(M)]$$

Complément de réflexion :

Nous allons ici faire porter nos observations sur les nombres entiers consécutifs et leur “propriété de primalité” (c'est-à-dire que chacun de ces nombres entiers supérieur ou égale à 2 ne peut être que premier ou composé). Notons $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $D \in \mathbb{N}$, et prenons en considération le produit suivant :

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M + E)$$

En faisant varier D sur \mathbb{N} , nous observons que cette formule peut être exprimée principalement par 3 cas :

* Le cas où $D = 0$:

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M + E) = s(M)$$

* Le cas où $D = 1$:

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M + E) = s(M).s(M + 1)$$

Or, les nombres premiers 2 et 3 étant les seuls nombres entiers consécutifs, il ne peut exister qu'un seul cas pour lequel $s(M).s(M+1)$ vaut 1. Nous avons donc :

Si $M = 2$ (ce qui permet $M + 1 = 3$),
alors $s(M).s(M + 1) = 1$

Si $M \geq 3$ (lorsque M est premier, $M + 1$ ne l'est pas et inversement),
alors $s(M).s(M + 1) = 0$

* Le cas où $D \geq 2$:

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M + E) = s(M).s(M + 1). \prod_{E=2}^{E=D} s(M + E) = 0$$

Comme cela implique un produit d'au moins 3 formules simplifiées dont chaque variable est M , $M + 1$ et $M + 2$ (c'est-à-dire au moins 3 nombres entiers consécutifs), et comme il n'existe pas plus de 2 nombres entiers consécutifs qui soient premiers, ce produit ne peut valoir que 0.

De manière équivalente, nous pouvons établir d'autres égalités à partir des ces remarques à propos de la propriété de primalité des nombres entiers consécutifs.

D'après le complément de $s(M)$, nous avons :

$$\begin{aligned} 1 - s(M) &= 0 && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ 1 - s(M) &= 1 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

Evidemment, nous pouvons alors noter, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $D \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$:

$$\prod_{M=2}^{M=D} s(M) = \prod_{M=2}^{M=D} [1 - s(M)] = 0$$

Ou encore :

$$\prod_{M=2}^{M \geq 4} s(M) = \prod_{M=2}^{M \geq 4} [1 - s(M)] = 0$$

3.2 Formule d'identité I(M)

Nous pouvons construire une formule “d'identité” $I(M)$ aux nombres premiers, une formule qui vaut ce nombre premier lorsque $M \in \mathbb{P}$:

$$I(M) = M.s(M)$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll} I(M) = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ I(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

donc

$$P_n = P_n.s(P_n)$$

3.3 Formule de comptage C(M)

Nous pouvons aussi construire une formule de “comptage” $C(M)$ des nombres premiers sur un intervalle, c'est-à-dire entre un nombre entier $N_1 \geq 2$ et un autre $N_2 \geq 2$, tel que $N_2 \geq N_1$, puisque $s(M) = 1$ pour chaque valeur de M étant un nombre premier. Notons :

$$C_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{M=N_1}^{M=N_2} s(M)$$

3.4 Formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(M)$

Partant du constat qu'il n'existe que deux nombres premiers qui soient des entiers consécutifs (il s'agit de 2 et de 3), nous pouvons construire une nouvelle formule que nous appellerons Impulsion Première de variable M (impulsion à cause de la forme de son graphique) basée sur cette propriété.

Partant de la formule de $s(M)$, si nous apportons des modifications dans ses parenthèses (en substituant la variable M à une modification), nous pouvons élaborer une formule différente mais qui reste vraie.

La formule $s(M)$ définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ est une formule qui vaut :

$$\begin{array}{lll} s(M) = 1 & \text{si } M \in \mathbb{P} & (\text{la réciproque est vraie}) \\ s(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

La formule $s(2.M)$ définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$ est une formule qui vaut :

$$\begin{array}{lll} s(2.M) = 1 & \text{si } M = 1 & (\text{la réciproque est vraie}) \\ s(2.M) = 0 & \text{si } M > 1 & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

Nous pouvons modifier cette formule de manière à ce qu'elle soit définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ en effectuant un "décalage" (de M vers $M + 1$) :

$$\begin{array}{lll} s(2.M + 2) = 1 & \text{si } M = 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \\ s(2.M + 2) = 0 & \text{si } M > 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

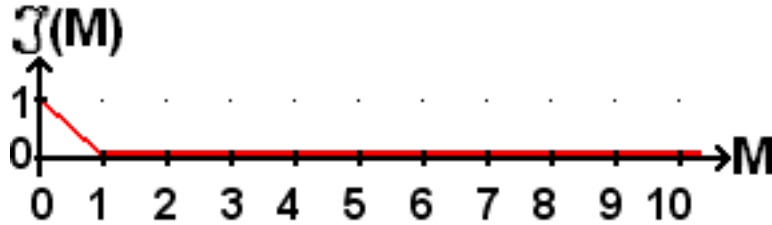
Notons $\mathfrak{I}(M)$ la fonction d'Impulsion Première de M telle que :

$$\mathfrak{I}(M) = s(2.M + 2)$$

Nous avons donc

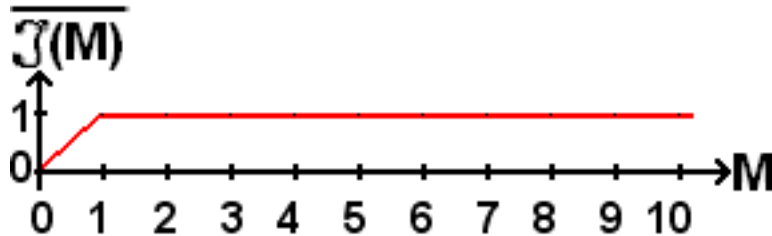
$$\begin{array}{lll} \mathfrak{I}(M) = 1 & \text{si } M = 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \\ \mathfrak{I}(M) = 0 & \text{si } M > 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

Graphiques :



Avec son complément (une fonction “carrée”) :

$$\overline{\mathfrak{J}(M)} = 1 - \mathfrak{J}(M)$$



Remarque 1 :

Comme pour la fonction $s(M)$, la fonction Impulsion Première de variable M ne possède que 2 états. Donc, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$:

$$\mathfrak{J}(M)^m = \mathfrak{J}(M)$$

nous pouvons même étendre le domaine de définition de m jusqu'à $m = 0$ si et seulement si $\mathfrak{J}(M) = 1$.

De plus :

$$\mathfrak{J}(M) = \mathfrak{J}(M^a) \quad \text{pour tout } M \in \mathbb{N}, M \geq 0 \text{ et pour tout } a \in \mathbb{N}, a \geq 1.$$

On peut étendre le domaine de définition de M aux entiers négatifs pour les puissances de M paires. Ce qui peut encore être noté :

$$\mathfrak{J}(M^{2a}) \text{ est définie pour tout } M \in \mathbb{Z} \text{ et pour tout } a \in \mathbb{N}, a \geq 1.$$

Remarque 2 :

Nous pouvons jouer sur les propriétés des nombres paires ou impaires lorsqu'on les multiplie entre eux ou lorsqu'on les additionne pour obtenir d'autres formules intéressantes :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(M) &= s(2.M + 2) \\ &= s[M + 2 + s(M + 2)]\end{aligned}$$

...

En effet, grâce aux propriétés des nombres paires et grâce au fait que $M = 2$ soit le seul nombre premier paire, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(M) &= s(2.M + 2) \\ &= s(4.M + 2) \\ &= s(6.M + 2) \\ &= s(8.M + 2) \\ &\dots \\ &= s(2.d.M + 2) \quad (\text{avec } d \in \mathbb{N}, d \geq 0)\end{aligned}$$

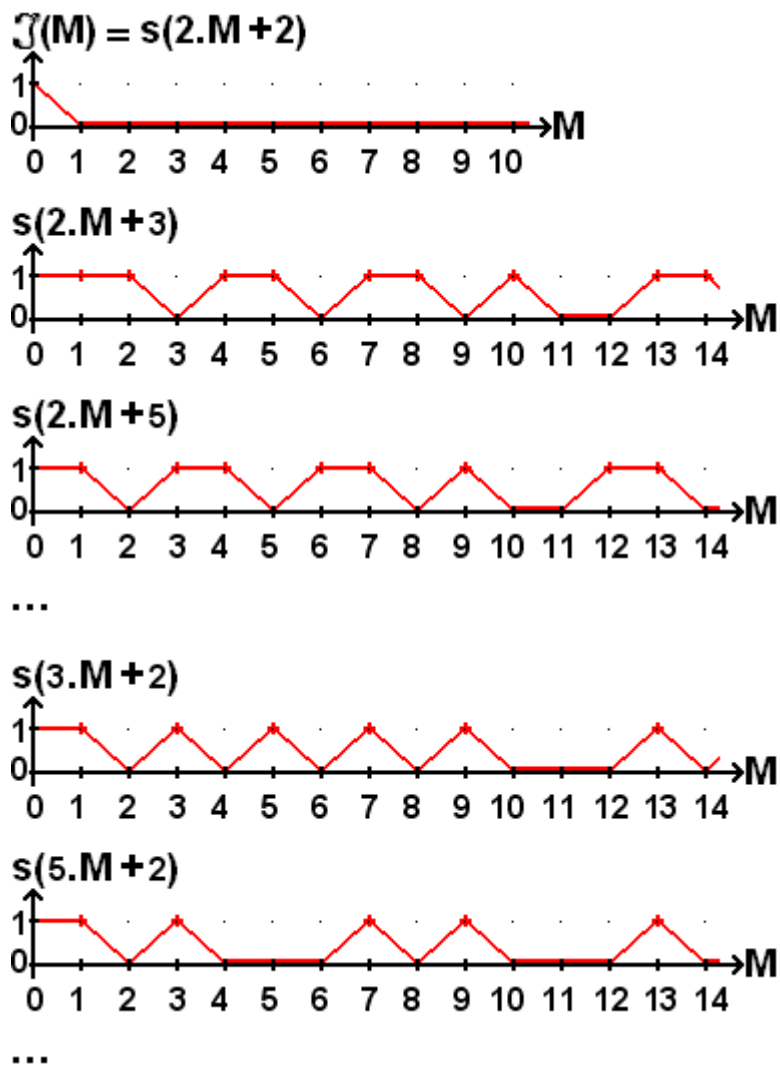
Et donc

$$\mathfrak{J}(M) = \mathfrak{J}(2.M) = \mathfrak{J}(4.M) = \mathfrak{J}(6.M) = \mathfrak{J}(8.M) = \dots = \mathfrak{J}(2.d.M)$$

dont chaque graphique correspondant est le même que celui de $\mathfrak{J}(M)$. Remarque identique concernant les multiples de nombres premiers notés ainsi :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(M) &= s(2.M + 2) \\ &= s(3.M + 3) \\ &= s(5.M + 5) \\ &= s(7.M + 7) \\ &= s(11.M + 11) \\ &\dots \\ &= s(P_n.M + P_n) \quad (\text{avec } P_n \in \mathbb{P}) \\ &\dots \\ &= s(P_n.d.M + P_n) \\ &= s[P_n.(d.M + 1)]\end{aligned}$$

Ce qui ne serait plus le cas si nous changions quelque peu les paramètres dans les parenthèses. En effet, voici quelques exemples de graphiques avec des fonctions sensiblement différentes :



Où l'on observe comme des “raies spectrales” (rappelons que les segments entre chaque point ne représente pas une continuité, ils sont tracés seulement pour aider à la lecture des graphiques).

Remarque 3 :

Comme nous avons établi (dans le paragraphe concernant la formule $s(M)$) que nous avons :

$$\begin{aligned} s(M).s(M+1) &= 1 && \text{si } M = 2 \\ s(M).s(M+1) &= 0 && \text{si } M \geq 3 \end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de donner une nouvelle égalité grâce aux remarques précédentes pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$s(M).s(M+1) = s(2.M - 2)$$

Ou encore, en effectuant un décalage (de M vers $M+2$), afin que les formules simplifiées soient définies pour une variable M telle que $M \in \mathbb{N}$:

$$s(2.M + 2) = s(M+2).s(M+3)$$

Et comme :

$$\mathfrak{J}(M) = s(2.M + 2)$$

Nous avons donc aussi (en reprenant $P_n \in \mathbb{P}$ et $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(M) &= s(2.M + 2) \\ &= s[P_n.(d.M + 1)] \\ &= s(M+2).s(M+3) \end{aligned}$$

Remarque 4 :

Etant donné les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) &= 1 && \text{si } M = 0 \\ \mathfrak{I}(M) &= 0 && \text{si } M \in \mathbb{N}, M \geq 1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) - 1 &= 0 && \text{si } M = 0 \\ \mathfrak{I}(M) - 1 &= -1 && \text{si } M \in \mathbb{N}, M \geq 1\end{aligned}$$

Mais également

$$\begin{aligned}1 - \mathfrak{I}(M) &= 0 && \text{si } M = 0 \\ 1 - \mathfrak{I}(M) &= 1 && \text{si } M \in \mathbb{N}, M \geq 1\end{aligned}$$

D'où

$$\mathfrak{I}(M) - 1 = 1 - \mathfrak{I}(M) = 0 \quad \text{si } M = 0$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) \cdot [\mathfrak{I}(M) - 1] &= 0 && \text{si } M = 0 \\ \mathfrak{I}(M) \cdot [\mathfrak{I}(M) - 1] &= 0 && \text{si } M \in \mathbb{N}, M \geq 1\end{aligned}$$

Mais également

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) \cdot [1 - \mathfrak{I}(M)] &= 0 && \text{si } M = 0 \\ \mathfrak{I}(M) \cdot [1 - \mathfrak{I}(M)] &= 0 && \text{si } M \in \mathbb{N}, M \geq 1\end{aligned}$$

Finalement, nous avons donc toujours :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) \cdot [1 - \mathfrak{I}(M)] &= 0 \\ \mathfrak{I}(M) \cdot [\mathfrak{I}(M) - 1] &= 0\end{aligned}$$

Ce qui nous laisse un choix entre 2 possibilités d'écrire cette égalité.

Ceci permet d'établir une autre égalité :

$$\mathfrak{I}(M).[1 - \mathfrak{I}(M)] = \mathfrak{I}(M).[\mathfrak{I}(M) - 1] = 0$$

D'où

$$\frac{\mathfrak{I}(M)}{[\mathfrak{I}(M) - 1]} = \frac{\mathfrak{I}(M)}{[1 - \mathfrak{I}(M)]}$$

D'où nous déduisons :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1}$$

Ce qui nous donne 2 possibilités d'écriture symétriques. Cette formule sera intéressante pour la suite (voir formule d'Impulsion Seconde $\beta(M)$).

Remarque 5 :

- De plus, il est encore possible de construire “l'Impulsion Première de la simplifiée de variable M ”, que l'on notera $\mathfrak{I}[s(M)]$, où nous avons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[s(M)] &= 0 & \text{si } s(M) &= 1 \\ \mathfrak{I}[s(M)] &= 1 & \text{si } s(M) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui correspond au “complément” de $s(M)$, et donc :

$$\mathfrak{I}[s(M)] = 1 - s(M)$$

- De même, il est possible de construire “l'Impulsion Première de l'Impulsion Première de variable M ” aussi, que l'on notera $\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)]$, où nous avons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)] &= 0 & \text{si } \mathfrak{I}(M) &= 1 \\ \mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)] &= 1 & \text{si } \mathfrak{I}(M) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui correspond au “complément” de $\mathfrak{I}(M)$, et donc :

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)] = 1 - \mathfrak{I}(M)$$

- Et de manière générale, pour toutes variables B (ou formules) ne pouvant prendre que des valeurs “binaires” (0 ou 1), nous avons :

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{I}(B) = 0 & \text{si } B = 1 \\ \mathfrak{I}(B) = 1 & \text{si } B = 0 \end{array}$$

Ce qui correspond au “complément” de B , et donc :

$$\mathfrak{I}(B) = 1 - B$$

Remarque 6 :

Cette formule $\mathfrak{I}(M)$ sera utile pour la recherche d’une formule de restriction R_n (voir la suite des travaux), mais son utilité apparaîtra encore dans le **Chapitre 2** et dans le **Chapitre 3 (Répartition exacte de nombre premiers)**.

3.5 Formule d'Impulsion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$

Partant de la formule $\mathfrak{I}(M)$, nous constatons aisément que lorsque nous la multiplions par un nombre quelconque, le résultat est ce même nombre pour $M = 0$ et le résultat est 0 pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$.

Ainsi, si nous désirons construire une formule qui tend vers $+\infty$ pour $M = 0$ et qui vaut 0 partout ailleurs (c'est-à-dire pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$), il nous suffit de multiplier $\mathfrak{I}(M)$ par une fonction qui tend vers $+\infty$ pour $M = 0$ et qui vaut un nombre quelconque partout ailleurs (c'est-à-dire qui est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$).

Les fonctions qui peuvent convenir pour cette fonction recherchée peuvent être par exemple :

$$\frac{1}{M} ; \frac{1}{M^2} ; \frac{1}{M^3} ; \dots ; \frac{1}{M^m} \quad (\text{avec } m \in \mathbb{N}, m \geq 1)$$

(et, de manière générale, pour tout polynôme de variable M qui s'annule pour $M = 0$ et qui est défini pour $M \geq 1$, l'inverse de ce polynôme)

et encore :

$$-\ln M$$

$$\dots$$

et aussi :

$$\frac{1}{[1 - \mathfrak{I}(M)]}$$

Ainsi, nous pouvons construire la formule d'Impulsion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$:

$$\mathfrak{I}_2(M) = \frac{\mathfrak{I}(M)}{M} = \frac{\mathfrak{I}(M)}{M^2} = \dots$$

$$\mathfrak{I}_2(M) = -\mathfrak{I}(M). \ln M = \mathfrak{I}(M). \ln \left(\frac{1}{M} \right)$$

et aussi :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_2(M) &= \frac{\mathfrak{I}(M)}{[1 - \mathfrak{I}(M)]} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}}\end{aligned}$$

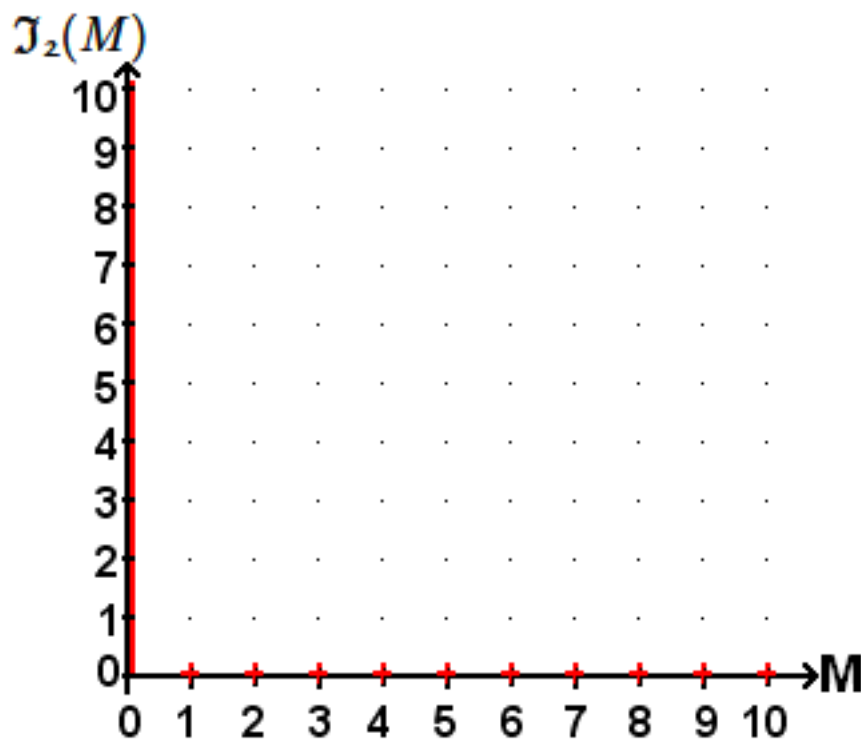
La formule $\mathfrak{I}_2(M)$ est donc définie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$. Le passage à la limite est nécessaire lorsque M tend vers 0 :

$$\mathfrak{I}_2(M) = 0 \quad \text{pour } M \in \mathbb{N}, M \geq 1$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \mathfrak{I}_2(M) = +\infty$$

La formule $\mathfrak{I}_2(M)$ est donc équivalente à la fonction δ de *DIRAC* si l'on considère que le domaine de définition de M peut être étendu à $M \in \mathbb{N}$.

Représentation graphique (tracée en rouge) :



La représentation graphique de $\mathfrak{I}_2(M)$ peut être assimilée au demi-axe des abscisses (les valeurs des *entiers* positifs) et au demi-axe des ordonnées (les valeurs des *réels* positifs).

Ici aussi nous pouvons construire la fonction complémentaire à $\mathfrak{I}_2(M)$, que nous noterons ainsi :

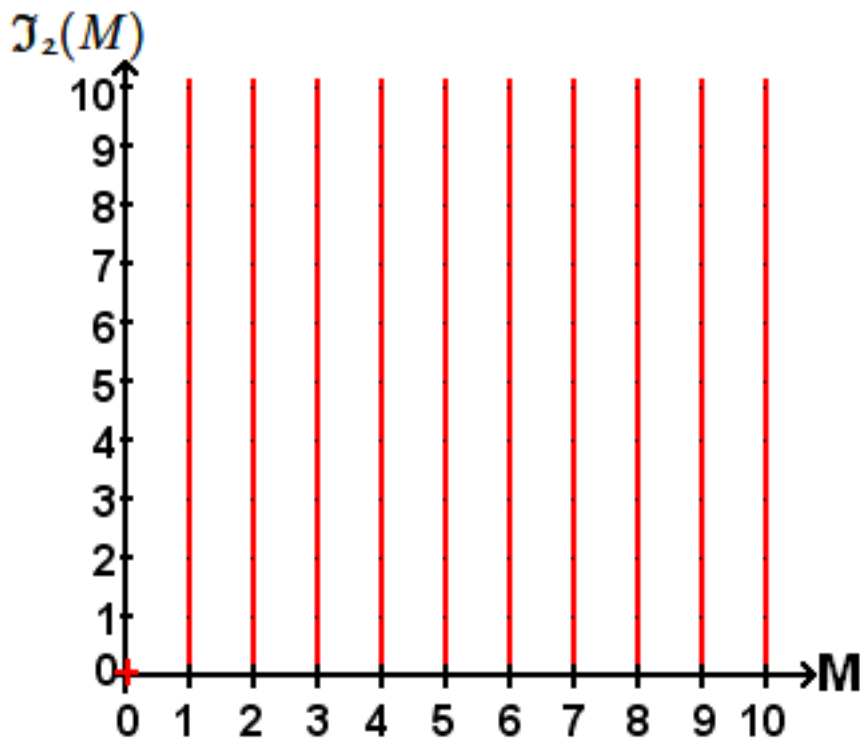
$$\overline{\mathfrak{I}_2(M)} = \frac{1}{\mathfrak{I}_2(M)}$$

Nous voyons bien qu'une représentation graphique serait difficile car cette fonction complémentaire vaudrait :

$$\overline{\mathfrak{I}_2(M)} = 0 \quad \text{pour } M = 0,$$

$$\lim_{M \rightarrow L} \overline{\mathfrak{I}_2(M)} = +\infty \quad \text{pour } L \in \mathbb{N}, L \geq 1$$

Donnons une idée approximative seulement grâce à ce graphique (tracé en rouge) :



Remarque 1 :

Rappelons que que les dérivées de δ de *DIRAC* apparaissent dans la transformation de Fourier des polynômes. Rappelons également que la fonction δ de *DIRAC* est utile à l'analyse harmonique. Ceci implique qu'il doit exister aussi un lien (mais seulement pour $M \in \mathbb{N}$) entre les nombres entiers associés à la fonction $\mathfrak{I}_2(M)$, certains types de polynômes (certains cas doivent pouvoir être généralisés, notamment par la mise en évidence des racines de ces polynômes par factorisation) et des cas particuliers correspondant en analyse harmonique.

Remarque 2 :

Comme nous l'avons vu dans la partie concernant la formule simplifiée $s(M)$, il existe une symétrie intéressante dans l'écriture de cette formule puisque nous avons :

$$\mathfrak{I}_2(M) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}}$$

Et de manière équivalente :

$$\mathfrak{I}_2(M) = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1}$$

En effet :

$$\lim_{\mathfrak{I}(M) \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1} = \lim_{\mathfrak{I}(M) \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = +\infty$$

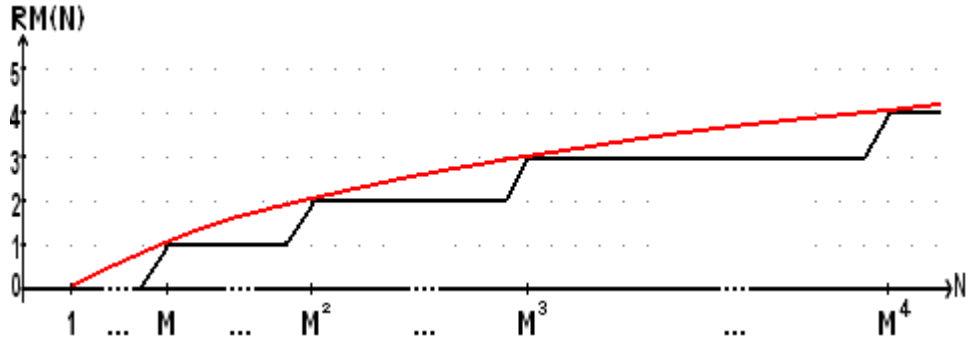
Et

$$\lim_{\mathfrak{I}(M) \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1} = \lim_{\mathfrak{I}(M) \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = +\infty$$

3.6 Formule de restriction RM(N)

Grâce aux propriétés de la fonction $\mathfrak{I}(X)$ (la fonction Impulsion Première de variable X), nous pouvons établir de nouvelles égalités et construire ainsi de nouvelles fonctions utiles, comme nous le verrons d'ailleurs plus en détail dans le **Chapitre 2**.

Dans la première partie, nous recherchons une fonction de Restriction R_n (que nous ramènerons à $RM(N)$) définie ainsi :



Or, nous connaissons les propriétés de $\mathfrak{I}(X)$ pour $X \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(X) &= 1 && \text{si } X = 0 \\ \mathfrak{I}(X) &= 0 && \text{si } X > 0 \end{aligned}$$

Et son complément :

$$\overline{\mathfrak{I}(X)} = 1 - \mathfrak{I}(X)$$

Si nous remplaçons X par un polynôme qui peut s'annuler aux valeurs qui nous intéressent, nous pourrions construire $RM(N)$. En effet, pour des polynômes de variable N ne donnant pour résultats que des valeurs entières positives, l'Impulsion Première de ce polynôme vaut 1 lorsqu'il s'annule et vaut 0 sinon. Ainsi, nous pouvons orienter nos recherches et construire la fonction Impulsion Première d'un polynôme telle que :

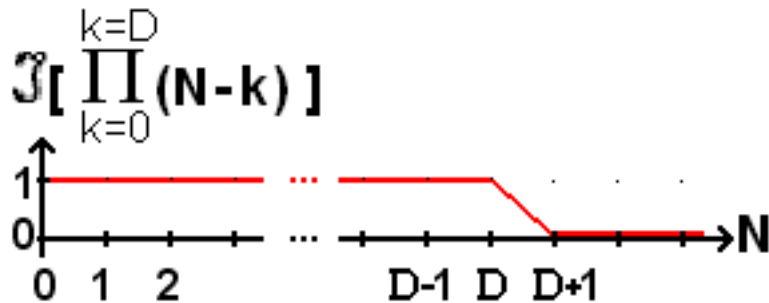
$$\mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] \quad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] = 1 \quad \text{pour } 0 \leq N \leq D$$

$$\mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] = 0 \quad \text{pour } N > D$$

et dont la représentation graphique est celle-ci :



La fonction “complémentaire” correspondante est équivalente à :

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] \quad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

où nous avons :

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] = 0 \quad \text{pour } 0 \leq N \leq D$$

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] = 1 \quad \text{pour } N > D$$

D'ailleurs, la fonction d'Impulsion n'étant définie que pour des valeurs entières positives, en élevant $(N - k)$ au carré, nous pouvons même ajouter que :

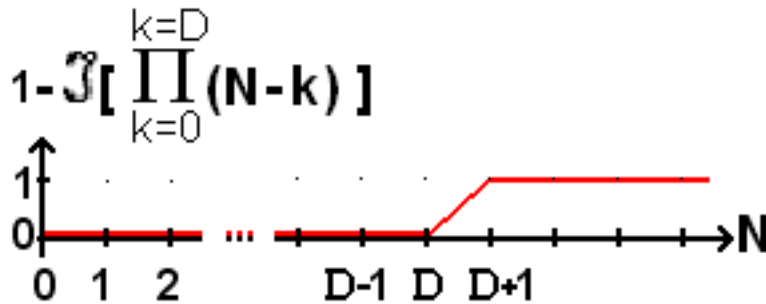
$$\mathfrak{I} \left[\prod_{k=D+1}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] = 0 \quad \text{pour } 0 \leq N \leq D$$

$$\mathfrak{I} \left[\prod_{k=D+1}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] = 1 \quad \text{pour } N > D$$

Et donc

$$\mathfrak{I} \left[\prod_{k=D+1}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] = 1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right]$$

La représentation graphique est celle-ci :



C'est cette dernière fonction qui va nous permettre de construire $RM(N)$. En effet, d'après le graphique du début de cette étude, nous constatons que la fonction $RM(N)$ peut être considérée comme étant la somme de fonctions plus simples et du même type que la fonction que nous venons de donner. Nous constatons que $RM(N)$ s'obtient en ajoutant les unes aux autres les fonctions suivantes (en étalant la somme sur plusieurs lignes) :

(voir page suivante)

Avec $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

$$\begin{aligned}
RM(N) &= 1 - \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M-1} (N - k) \right] \\
&\quad + 1 - \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^2-1} (N - k) \right] \\
&\quad + 1 - \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^3-1} (N - k) \right] \\
&\quad + 1 - \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^4-1} (N - k) \right] \\
&\quad + \dots \\
&\quad + 1 - \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1} (N - k) \right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
RM(N) &= \sum_{b=1}^{b=a} \left\{ 1 - \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N - k) \right] \right\} \\
&= \left(\sum_{b=1}^{b=a} 1 \right) - \sum_{b=1}^{b=a} \left\{ \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N - k) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Et donc

$$RM(N) = a - \sum_{b=1}^{b=a} \mathfrak{J} \left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N - k) \right]$$

De même, d'après l'égalité que nous avons établi juste avant, nous avons :

$$\begin{aligned}
RM(N) &= \mathfrak{I} \left[\prod_{k=M}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] \\
&+ \mathfrak{I} \left[\prod_{k=M^2}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] \\
&+ \mathfrak{I} \left[\prod_{k=M^3}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] \\
&+ \mathfrak{I} \left[\prod_{k=M^4}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right] \\
&+ \dots \\
&+ \mathfrak{I} \left[\prod_{k=M^a}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right]
\end{aligned}$$

Et donc, nous avons aussi :

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=a} \mathfrak{I} \left[\prod_{k=M^b}^{k \rightarrow +\infty} (N - k)^2 \right]$$

Remarque :

Théoriquement, nous aurions pu faire tendre a vers l'infini positif, afin d'obtenir une fonction de restriction idéale en fonction de toutes les puissances de M supérieures ou égales à 1 et valable pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Poursuivons le raisonnement. D'après les démonstrations effectuées en fin de partie “**2.2.5 Construction de la fonction α_M** ” (page 131) : pour la fonction α_M , les calculs ne sont plus nécessaires lorsque $x > \alpha_M$ car $f(M; x) = 0$. Ce qui signifie que pour la fonction $RM(N)$ que les calculs ne sont plus nécessaires lorsque :

$$1 - \mathfrak{I} \left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1} (N - k) \right] = 0$$

C'est-à-dire, et pour des valeurs de a croissantes, dès que :

$$\Im \left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1} (N - k) \right] = 1$$

Cela signifie encore que les calculs ne sont plus nécessaires dès que :

$$\prod_{k=0}^{k=M^a-1} (N - k) = 0$$

Ce qui sous-entend finalement que les calculs ne sont plus nécessaires dès que :

N est une des valeurs entières de l'intervalle $[0; M^a - 1]$.

3.7 Equivalences de formules

Rappelons que

$$\begin{aligned}s(M) &= 1 && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ s(M) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{P}\end{aligned}$$

$s(M)$ n'étant définie que pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$.

Donc

$$\begin{aligned}M^{s(M)} &= M && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M^{s(M)} &= 1 && \text{si } M \notin \mathbb{P}\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}M^{s(M)} - 1 &= (M - 1) = (M - 1).s(M) && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M^{s(M)} - 1 &= 0 && = s(M) && \text{si } M \notin \mathbb{P}\end{aligned}$$

Or lorsque $s(M)$ vaut 0, multiplier n'importe quelle fonction par $s(M)$ donne 0 pour résultat. Pour conclure :

$$M^{s(M)} - 1 = (M - 1).s(M)$$

$$s(M) = \frac{M^{s(M)} - 1}{M - 1}$$

De la même manière, nous avons :

$$s(M) = \frac{1 - (1 - M)^{s(M)}}{M}$$

\Rightarrow Ces dernières formules sont intéressantes dans le sens où elles peuvent s'exprimer en fonction d'elles-mêmes, c'est-à-dire en faisant référence à elles-mêmes.

En appliquant le même raisonnement à la fonction $\mathfrak{J}(M)$, et pour une variable "indépendante" de $\mathfrak{J}(M)$, que nous noterons X , et telle que X soit un nombre entier (remarquons que ce raisonnement est aussi valable si X est un polynôme ne donnant que des valeurs entières).

Nous avons :

$$X^{\mathfrak{I}(M)} - 1 = (X - 1) \cdot \mathfrak{I}(M)$$

valable pour tout $X \in \mathbb{N}$, mais avec condition sur M pour un cas de X :

Si $X = 0$, on doit avoir $M = 0$ (pour que $\mathfrak{I}(M) \neq 0$)

Cette dernière formule me paraît plus intéressante que la précédente car :

Si $X = 0$, on doit avoir $\mathfrak{I}(M) = 1$ (donc $M = 0$) pour que l'égalité soit respectée.

Si $X = 1$, la valeur de $\mathfrak{I}(M)$ (et donc de M) n'a pas d'importance dans le calcul.

Si $X > 1$, l'égalité est respectée quelquesoit la valeur de $\mathfrak{I}(M)$ (donc tout M).

Ou encore, en regroupant les conditions :

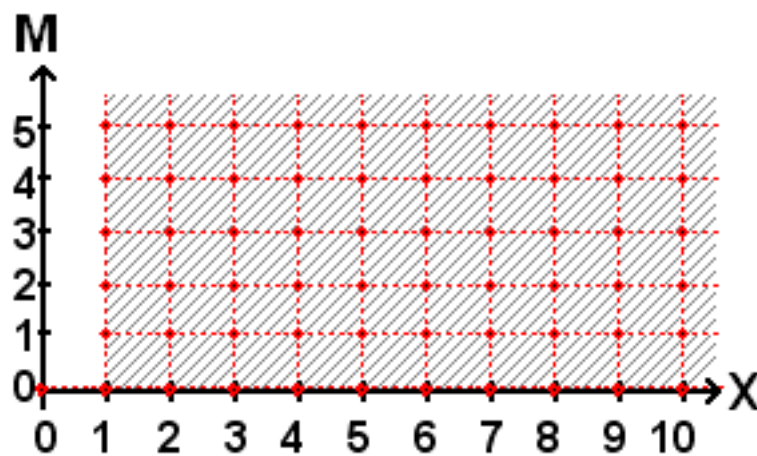
$$X^{\mathfrak{I}(M)} - 1 = (X - 1) \cdot \mathfrak{I}(M) \quad \text{avec } \mathfrak{I}(M) = s(2.M + 2)$$

Pour $X = 0$ et pour $M = 0$ seulement

Ou

Pour tout $X \in \mathbb{N}$, $X \geq 1$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$

Donnons une représentation graphique du domaine de définition de cette égalité pour une meilleure compréhension :



Cette égalité est respectée pour tout M et X étant repérés par des points rouges.

Nous pouvons encore écrire :

Si $M > 0$, on a $X > 0$

Si $M = 0$, on a $X \geq 0$

\Rightarrow Ici aussi, cette formule peut être écrite de manière “auto-référentielle” (c’est-à-dire que cette formule peut s’exprimer en fonction d’elle-même), avec auto-référencement sur $\mathfrak{J}(M)$:

$$\mathfrak{J}(M) = \frac{X^{\mathfrak{J}(M)} - 1}{X - 1}$$

Remarque : nous pouvons étendre le domaine de définition sur X à l’ensemble des nombres réels avec la même condition sur M (c’est-à-dire $M = 0$) lorsque $X = 0$. Dans ce cas, l’axe des ordonnées est aussi l’axe de symétrie de cette nouvelle représentation graphique. De plus, nous pourrions remplacer la variable X par une fonction, avec la même condition sur M (c’est-à-dire lorsque $M = 0$) si la fonction s’annule.

Nous pouvons remarquer aussi qu’en remplaçant $\mathfrak{J}(M)$ à droite de l’égalité par la formule complète, nous pouvons procéder ainsi de manière à obtenir une formule qui “s’étend à l’infini” :

$$\mathfrak{J}(M) = \frac{X^{\mathfrak{J}(M)} - 1}{X - 1} = \frac{X^{\left(\frac{X^{\mathfrak{J}(M)} - 1}{X - 1}\right)} - 1}{X - 1} = \dots$$

Même remarque sur la fonction complémentaire de $\mathfrak{J}(M)$:

$$1 - \mathfrak{J}(M) = \frac{X^{[1 - \mathfrak{J}(M)]} - 1}{X - 1}$$

D’où

$$\mathfrak{J}(M) = \frac{1 - \frac{1}{X^{\mathfrak{J}(M)}}}{1 - \frac{1}{X}}$$

Et comme :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{1 - \frac{1}{X^{\mathfrak{I}(M)}}}{1 - \frac{1}{X}} = \frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1}$$

Nous déduisons également :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{\ln[1 + X - X^{1-\mathfrak{I}(M)}]}{\ln X}$$

Ou encore :

$$\mathfrak{I}(M) = 1 - \frac{\ln[1 + X - X^{\mathfrak{I}(M)}]}{\ln X}$$

L'égalité étant conservée dans le cas où $X = M$ et sans condition sur M (et forcément sans condition sur X), nous avons pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$:

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{M^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{M - 1}$$

Remarque 1 :

Pour l'égalité que nous avons noté :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1}$$

Avec les condition suivantes :

Pour $X = 0$ et pour $M = 0$ seulement

Ou

Pour tout $X \in \mathbb{N}$, $X \geq 1$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$

Nous pouvons contourner ce problème des conditions en interdisant par exemple à X de valoir 0 (d'autres exemples peuvent être trouvés, avec des polynômes n'ayant pas de racines entières). Partons de ce constat :

$$X + \mathfrak{I}(X) = 1 \quad \text{si } X = 0$$

$$X + \mathfrak{I}(X) = X \quad \text{si } X > 0$$

Où nous devons restreindre X tel que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$.

Si nous reprenons la formule en la modifiant quelque peu avec ces nouvelles données, nous avons :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{[X + \mathfrak{I}(X)]^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{[X + \mathfrak{I}(X)] - 1}$$

Où désormais, X a été remplacé dans la formule par l'ensemble $[X + \mathfrak{I}(X)]$ qui ne peut jamais être égale à 0, mais son domaine de définition doit être restreint.

D'autre part et plus largement :

Revenons à $X \in \mathbb{R}$. En effectuant un “décalage de symétrie”, c'est -à-dire en faisant passer l'axe de symétrie par un autre point sur l'axe des abscisses, nous obtenons des graphiques du même type. En effet, en notant D une constante telle que $D \in \mathbb{R}$ et en modifiant légèrement les notations ainsi :

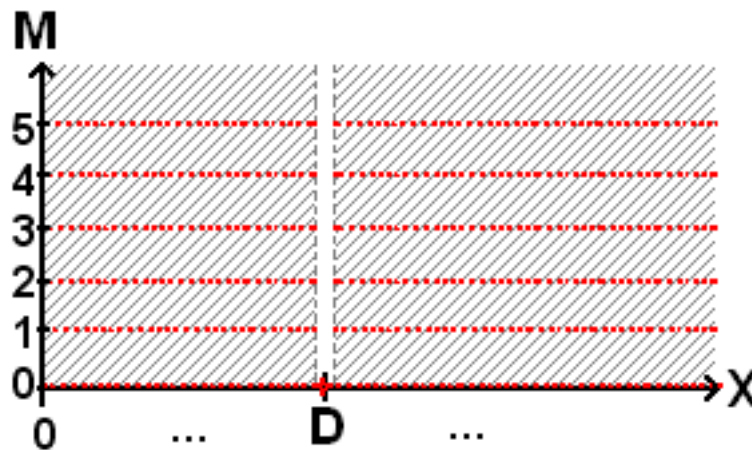
$$\mathfrak{I}(M) = \frac{(X - D)^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - D - 1}$$

Nous pouvons écrire :

Si $X = D$, on doit avoir la condition que $M = 0$ seulement.

Si $X \neq D$, toutes les valeurs de $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ sont possibles.

Graphiquement, le domaine de définition de cette égalité se représente comme ceci :



Où l'axe vertical passant par le point D en abscisse est l'axe de symétrie du domaine de définition.

Cas particulier de $X = 2$ et $D = 0$:

$$\mathfrak{J}(M) = 2^{\mathfrak{J}(M)} - 1$$

Même remarque sur la fonction complémentaire de $\mathfrak{J}(M)$:

$$1 - \mathfrak{J}(M) = 2[1 - \mathfrak{J}(M)] - 1$$

$$\mathfrak{J}(M) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{\mathfrak{J}(M)}} \right)$$

Et même remarque pour $s(M)$ (et pour sa fonction complémentaire) :

$$s(M) = 2^{s(M)} - 1$$

Remarque 2 :

Nous aurions pu aussi noter :

$$(1 - X)^{\mathfrak{J}(M)} = 1 - X \cdot \mathfrak{J}(M) \quad \text{définie pour } X \in \mathbb{R} - \{1\}$$

(à cause de la condition à respecter telle que $(1 - X) \neq 0$ lorsque $\mathfrak{J}(M) = 0$)

Remarque 3 :

De manière moins pertinente, nous avons :

$$\begin{array}{ll} M + \mathfrak{J}(M) = 1 & \text{si } M = 0 \\ M + \mathfrak{J}(M) = M & \text{si } M > 0 \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ll} [M + \mathfrak{J}(M)]^{\mathfrak{J}(M)} = [0 + 1]^1 = 1 & \text{si } M = 0 \\ [M + \mathfrak{J}(M)]^{\mathfrak{J}(M)} = [M + 0]^0 = 1 & \text{si } M > 0 \end{array}$$

Et donc

$$[M + \mathfrak{J}(M)]^{\mathfrak{J}(M)} = 1$$

Même raisonnement et même conclusion pour :

$$M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M)$$

En effet,

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M) &= 0^1 + 1 = 1 && \text{si } M = 0 \\ M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M) &= M^0 + 0 = 1 && \text{si } M > 0 \end{aligned}$$

Donc

$$M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M) = 1$$

D'où

$$\mathfrak{I}(M) = 1 - M^{\mathfrak{I}(M)}$$

Ou encore :

$$M^{\mathfrak{I}(M)} = 1 - \mathfrak{I}(M) = \overline{\mathfrak{I}(M)}$$

Et donc, pour finir :

$$\mathfrak{I}(M) + M^{\mathfrak{I}(M)} = [\mathfrak{I}(M) + M]^{\mathfrak{I}(M)} = 1$$

Remarque 4 :

Comme précédemment :

$$\begin{aligned} M - \mathfrak{I}(M) &= -1 && \text{si } M = 0 \\ M - \mathfrak{I}(M) &= M && \text{si } M > 0 \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} [M - \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} &= -1 && \text{si } M = 0 \\ [M - \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} &= 1 && \text{si } M > 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (-1)^{\mathfrak{I}(M)} &= -1 & \text{si } M = 0 \\ (-1)^{\mathfrak{I}(M)} &= 1 & \text{si } M > 0 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$[M - \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = (-1)^{\mathfrak{I}(M)}$$

Remarque 5 :

De manière identique, nous avons :

$$\begin{aligned} [M \pm \mathfrak{I}(M)]^{[1-\mathfrak{I}(M)]} &= 1 & \text{si } M = 0 \\ [M \pm \mathfrak{I}(M)]^{[1-\mathfrak{I}(M)]} &= M & \text{si } M > 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} M + \mathfrak{I}(M) &= 1 & \text{si } M = 0 \\ M + \mathfrak{I}(M) &= M & \text{si } M > 0 \end{aligned}$$

Et donc

$$[M \pm \mathfrak{I}(M)]^{[1-\mathfrak{I}(M)]} = M + \mathfrak{I}(M)$$

Ou encore, de manière équivalente :

$$[M + \mathfrak{I}(M)]^{[1-\mathfrak{I}(M)]} = [M - \mathfrak{I}(M)]^{[1-\mathfrak{I}(M)]}$$

D'où

$$[1 - \mathfrak{I}(M)] \cdot \ln[M + \mathfrak{I}(M)] = [1 - \mathfrak{I}(M)] \cdot \ln[M - \mathfrak{I}(M)]$$

Ce qui constitue une nouvelle possibilité de donner 2 écritures “symétriques”.

Remarque 6 :

De même :

$$[1 - \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = 1 - \mathfrak{I}(M)$$

Ou encore :

$$\mathfrak{I}(M)^{[1-\mathfrak{I}(M)]} = \mathfrak{I}(M)$$

Développement d'une formule :

Ce petit paragraphe va simplement nous servir à donner un moyen de développer une formule du type :

$$(a - b)^{\mathfrak{I}(M)}$$

avec a et $b \in \mathbb{R}$, et avec la condition que $(a - b) \neq 0$ si $\mathfrak{I}(M) = 0$.

En notant :

$$(a - b) = X$$

Nous avons :

$$(a - b)^{\mathfrak{I}(M)} = X^{\mathfrak{I}(M)}$$

Or, nous avons noté au début de cette partie :

$$X^{\mathfrak{I}(M)} - 1 = (X - 1).\mathfrak{I}(M)$$

Donc

$$X^{\mathfrak{I}(M)} = (X - 1).\mathfrak{I}(M) + 1$$

Et donc

$$(a - b)^{\mathfrak{I}(M)} = (a - b - 1).\mathfrak{I}(M) + 1$$

Ou encore

$$(a - b)^{\mathfrak{I}(M)} = (a - b) \cdot \mathfrak{I}(M) + [1 - \mathfrak{I}(M)]$$

Mais il existe d'autres égalités possibles si nous admettons des conditions supplémentaires :

$$(a - b)^{\mathfrak{I}(M)} = a \cdot \mathfrak{I}(M) + (-b)^{\mathfrak{I}(M)} \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ si } \mathfrak{I}(M) = 0$$

Ou encore :

$$(a - b)^{\mathfrak{I}(M)} = (-1)^{\mathfrak{I}(M)} \cdot [(-a)^{\mathfrak{I}(M)} + b \cdot \mathfrak{I}(M)] \quad \text{avec } a \neq 0 \text{ si } \mathfrak{I}(M) = 0$$

Remarque 7 :

Dans cette partie de l'étude, nous aurions pu quelquefois raisonner de la même manière que pour $\mathfrak{I}(M)$ mais avec $s(M)$. En effet, nous pouvons observer que la cohérence est respectée lorsqu'on remplace $\mathfrak{I}(M)$ par $s(M)$ dans les formules de la "**Remarque 2**", de la "**Remarque 6**", et du paragraphe précédent "**Développement d'une formule**" en respectant les conditions préconisées à propos du domaine de définition des variables.

De plus, nous pouvons donner rapidement une autre équivalence permise par la formule $s(M)$:

$$s(M) = (1 + M)^{s(M)} - M^{s(M)}$$

Remarque 8 :

Pour poursuivre avec la formule $s(M)$ et d'après ce que nous savons :

$$M^{s(M)} + M^{[1-s(M)]} = M + 1$$

Et donc

$$M = M^{s(M)} + M^{[1-s(M)]} - 1$$

De même que (en substituant $(M - 1)$ à M , sauf dans les puissances) :

$$M = (M - 1)^{s(M)} + (M - 1)^{[1-s(M)]}$$

Plus généralement, pour $X \in \mathbb{R}^*$:

$$X = X^{s(M)} + X^{[1-s(M)]} - 1$$

Ou, pour $X \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$X = (X - 1)^{s(M)} + (X - 1)^{[1-s(M)]}$$

Finalement, pour X et $Y \in \mathbb{R}^*$:

$$X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - 1 = X.s(M) + Y.[1 - s(M)]$$

Ou, pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$:

$$X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - 1 = (X - 1)^{s(M)} + (Y - 1)^{[1-s(M)]}$$

Ce qui permet aussi d'écrire de manière presque équivalente (le domaine de définition est différent) que, pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$X.s(M) + Y.[1 - s(M)] = (X - 1)^{s(M)} + (Y - 1)^{[1-s(M)]}$$

De manière encore plus générale, nous avons aussi :

- Pour $d \in \mathbb{R}$ et pour X et $Y \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - d &= (X - d + 1).s(M) + (Y - d + 1).[1 - s(M)] \\ &= s(M).(X - Y) + (Y - d + 1) \end{aligned}$$

- Pour $d \in \mathbb{R}$ et pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{0; d\}$:

$$X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - d = (X - d)^{s(M)} + (Y - d)^{[1-s(M)]}$$

- Ce qui permet aussi d'écrire de manière presque équivalente (le domaine de définition est différent) que, pour $d \in \mathbb{R}$, pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{d\}$:

$$\begin{aligned}(X - d)^{s(M)} + (Y - d)^{[1-s(M)]} &= (X - d + 1).s(M) + (Y - d + 1).[1 - s(M)] \\ &= s(M).(X - Y) + (Y - d + 1)\end{aligned}$$

Remarque :

Ces types de formules trouveront leur intérêt dans les paragraphes qui suivent directement celui-ci.

Autres équivalences de formules 1 :

Prenons en considération les formules qui suivent en notant M une variable telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et P_n un nombre premier constant supposé connu tel que $P_n \in \mathbb{P}$.

- 1er cas :

$$\begin{array}{ll} M.s(M) = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M.s(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{ll} P_n.[1 - s(M)] = 0 & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ P_n.[1 - s(M)] = P_n & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ll} P_n.[1 - s(M)] + M.s(M) = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ P_n.[1 - s(M)] + M.s(M) = P_n & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Et donc

$$P_n.[1 - s(M)] + M.s(M) \quad \text{vaut toujours un nombre premier.}$$

- 2ième cas :

$$\begin{array}{ll} M^{s(M)} = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M^{s(M)} = 1 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{ll} [P_n - 1].[1 - s(M)] = 0 & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ [P_n - 1].[1 - s(M)] = (P_n - 1) & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ll} [P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ [P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} = P_n & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Et donc

$$[P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} \quad \text{vaut toujours un nombre premier.}$$

Cette formule étant strictement équivalente à celle du 1er cas.

- Exemple :

Pour $P_n = 2$, nous avons :

$$P_n.[1 - s(M)] + M.s(M) = 2 + (M - 2).s(M)$$

Ou, de manière strictement équivalente :

$$[P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} = 1 - s(M) + M^{s(M)}$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$(M - 1)^{s(M)} + 1$$

Où nous pouvons même choisir de restreindre M à $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$ pour obtenir tous les nombres premiers possibles puisque :

$$(M - 1)^{s(M)} + 1 = M \quad \text{si } M \in \mathbb{P}$$

Or, si $M \in \mathbb{P}$ avec $M \geq 3$, cela signifie que “la formule vaut tous les nombres premiers supérieurs ou égale à 3, c’est-à-dire tous sauf le nombre 2”.

Et

$$(M - 1)^{s(M)} + 1 = 2 \quad \text{si } M \notin \mathbb{P}$$

Or, si $M \notin \mathbb{P}$ avec $M \geq 3$, cela signifie que “la formule vaut seulement le nombre 2”, c’est-à-dire le seul nombre premier qui manque au domaine de définition de M . Ce qui nous permet de faire la synthèse :

$$(M - 1)^{s(M)} + 1 \quad \text{vaut toujours un nombre premier pour } M \in \mathbb{N}, M \geq 3.$$

De plus cette formule peut valoir n’importe quel nombre premier possible.

Autres équivalences de formules 2 :

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, soit $d \in \mathbb{N}$. Il est possible de déduire que :

$$\begin{array}{ll} s(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \\ s(M + d) = 0 & \text{si } (M + d) \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{ll} s(M) = 1 & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ s(M + d) = 1 & \text{si } (M + d) \in \mathbb{P} \end{array}$$

Et donc, d'une part :

$$\begin{array}{ll}
 s(M) + s(M + d) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \notin \mathbb{P} \\
 s(M) + s(M + d) = 1 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \in \mathbb{P} \\
 s(M) + s(M + d) = 1 & \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \notin \mathbb{P} \\
 s(M) + s(M + d) = 2 & \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \in \mathbb{P}
 \end{array}$$

Et donc, d'autre part :

$$\begin{array}{ll}
 s(M).s(M + d) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \notin \mathbb{P} \\
 s(M).s(M + d) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \in \mathbb{P} \\
 s(M).s(M + d) = 0 & \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \notin \mathbb{P} \\
 s(M).s(M + d) = 1 & \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \in \mathbb{P}
 \end{array}$$

* *Par exemple :*

Pour les nombres premiers jumeaux, nous avons $M \in \mathbb{P}$ et $(M + d) \in \mathbb{P}$ lorsque $d = 2$. Nous avons dans ce cas :

$$s(M).s(M + 2) = 1$$

Ou

$$s(M) + s(M + 2) = 2$$

Autres équivalences de formules 3 :

- Dans le même ordre d'idée que les 2 paragraphes précédents, notons M une variable telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et soit d la différence entre 2 nombres premiers. Si $M \in \mathbb{P}$ et si M est le plus petit de ces 2 nombres premiers, alors d'après l'énoncé, nous avons aussi $(M + d) \in \mathbb{P}$.

Nous pouvons alors écrire :

$$s(M) = s(M + d) = 1 \quad \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ et si } (M + d) \in \mathbb{P}$$

Et

$$\begin{array}{ll}
 s(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \\
 s(M + d) = 0 & \text{si } (M + d) \notin \mathbb{P}
 \end{array}$$

Soit P_n un nombre premier constant supposé connu tel que $P_n \in \mathbb{P}$ et tel que $(P_n + d) \in \mathbb{P}$. Nous pouvons affirmer que la formule suivante :

$$s(M).s(M + d).[M - P_n] + P_n$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit sur 2 nombres premiers dont la différence vaut d . En effet, puisque :

$$s(M).s(M + d).[M - P_n] + P_n = M \quad \text{si } s(M) = s(M + d) = 1$$

Et

$$s(M).s(M + d).[M - P_n] + P_n = P_n \quad \text{si } s(M) = 0 \text{ ou si } s(M + d) = 0.$$

* Exemple 1 :

Pour $d = 1$, nous avons 2 nombres premiers connus dont la différence vaut 1, il s'agit de $P_n = 2$ et $(P_n + 1) = 3$. Nous pouvons alors noter que :

$$s(M).s(M + 1).[M - 2] + 2$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit sur 2 nombres premiers dont la différence vaut 1. Comme 2 et 3 sont les seuls nombres premiers à avoir cette différence, nous pouvons même ajouter que :

$$s(M).s(M + 1).[M - 2] + 2 = 2 \quad \text{quelquesoit } M \in \mathbb{N}, M \geq 2$$

Ceci revient encore à écrire :

$$s(M).s(M + 1).[M - 2] = 0 \quad \text{quelquesoit } M \in \mathbb{N}, M \geq 2$$

* Exemple 2 :

Pour $d = 2$, nous sommes dans le cas des nombres premiers jumeaux. Nous pouvons choisir 2 nombres premiers jumeaux connus, prenons $P_n = 3$ et $(P_n + 2) = 5$. Nous pouvons alors noter que :

$$s(M).s(M + 2).[M - 3] + 3$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit sur 2 nombres premiers jumeaux.

- De même, nous pourrions encore étendre le raisonnement en considérant des triplets de nombres premiers dont la différence entre le plus grand et l'intermédiaire vaut d , et la différence entre l'intermédiaire et le plus petit vaut aussi d . Avec P_n un nombre premier constant supposé connu tel que $P_n \in \mathbb{P}$, tel que $(P_n + d) \in \mathbb{P}$ et tel que $(P_n + 2d) \in \mathbb{P}$. D'après les mêmes notations, nous avons :

$$s(M).s(M + d).s(M + 2d).[M - P_n] + P_n$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit de ces 3 nombres premiers correspondant à l'énoncé.

Nous pouvons donner comme exemple 3 nombres premiers connus pour lesquels $d = 2$: il s'agit de $P_n = 3$, de $(P_n + 2) = 5$ et de $(P_n + 4) = 7$. Cela nous permettant d'établir que :

$$s(M).s(M + d).s(M + 2d).[M - 3] + 3$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit de ce triplet de nombres premiers et dont $d = 2$.

- Pour finir, nous pourrions encore étendre le raisonnement au-delà des triplets de nombres premiers.

Autres équivalences de formules 4 :

D'après la même fonction $s(M)$ que précédemment (définie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$) et pour D une variable définie pour $D \in \mathbb{N}$, $D \geq 2$, et au même titre que pour M , la fonction $s(D)$ est la simplifiée de variable D (dont les propriétés sont similaires à celles de la fonction $s(M)$, mais pour la variable D indépendamment de la variable M) :

$$\begin{aligned} M.s(M) &= M && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M.s(M) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} D - M.s(M) &= D - M && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ D - M.s(M) &= D && \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} [D - M.s(M)]^{s(D)} &= D - M.s(M) && \text{si } D \in \mathbb{P} \\ [D - M.s(M)]^{s(D)} &= 1 && \text{si } D \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} \\ &= [D - 2]^{s(D)} \cdot [D - 3]^{s(D)} \cdot [D]^{s(D)} \cdot [D - 5]^{s(D)} \cdot [D]^{s(D)} \cdot [D - 7]^{s(D)} \cdot [D]^{s(D)} \dots \\ &= \left\{ \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)] \right\}^{s(D)} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} &= 0 && \text{si } D \in \mathbb{P} \\ \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} &= 1 && \text{si } D \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

Et finalement, nous remarquons que ces égalités correspondent au contraire de la fonction $s(D)$:

$$\begin{aligned} s(D) &= 1 && \text{si } D \in \mathbb{P} \\ s(D) &= 0 && \text{si } D \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

D'où

$$\prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 - s(D)$$

Et donc

$$s(D) = 1 - \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)}$$

Parallèlement à ceci, nous avons aussi le “polynôme” :

$$\begin{aligned} \left[\prod_{p \in \mathbb{P}} (D - p) \right]^{s(D)} &= 0 && \text{si } D \in \mathbb{P} \\ \left[\prod_{p \in \mathbb{P}} (D - p) \right]^{s(D)} &= 1 && \text{si } D \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

Et donc, nous pouvons également noter :

$$\begin{aligned} s(D) &= 1 - \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} \\ &= \left[\prod_{p \in \mathbb{P}} (D - p) \right]^{s(D)} \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer qu'il n'est pas nécessaire de borner M de 2 à l'infini positif si l'on considère qu'il existe toujours au moins un nombre premier entre N et $2N$.

Afin que $s(M)$ soit toujours définie, notons $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. En effet, nous pouvons constater que :

Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, il existe toujours un nombre premier entre N et $(2N-1)$ (puisque $2N$ ne peut pas être un nombre premier).

$$\prod_{M=N}^{M=2N-1} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 0 \quad \text{si } D \in \mathbb{P} \text{ sur l'intervalle } [N; (2N-1)]$$

$$\prod_{M=N}^{M=2N-1} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 \quad \text{si } D \notin \mathbb{P}$$

Ce qui correspond ici aussi au contraire de la fonction $s(D)$ pour $D \in [N; (2N-1)]$.

Nous pouvons donc écrire, pour $D \in [N; (2N-1)]$:

$$\prod_{M=N}^{M=2N-1} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 - s(D)$$

Autres cas intéressant, un cas “binaire” :

“Simulation” de $s(M)$ avec une variable B plus restreinte.

Soit B une variable ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 et $\mathfrak{I}(B)$ la fonction d’Impulsion Première (définie tel que précédemment) associée à la variable B (précédemment, elle était associée à la variable M) , nous obtenons pour $\mathfrak{I}(B)$ toutes les valeurs possibles qui sont respectivement 1 et 0. Nous avons ceci :

$$\mathfrak{I}(0) = 1$$

$$\mathfrak{I}(1) = 0$$

D’où

$$\mathfrak{I}(B) = 1 - B$$

(Ou $\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(B)] = B$, ou encore $\mathfrak{I}(1 - B) = B$)

Avec la variable B , “toutes” les valeurs possibles de $s(M)$ (1 ou 0) sont atteintes. Or, pour $X \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$\mathfrak{I}(B) = \frac{X^{\mathfrak{I}(B)} - 1}{X - 1}$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 - B &= \frac{X^{(1-B)} - 1}{X - 1} \\ \Rightarrow B &= \frac{1 - X^{(1-B)} + (X - 1)}{X - 1} \\ \Rightarrow B &= \frac{X - X^{(1-B)}}{X - 1} \\ \Rightarrow B &= \frac{1 - \frac{1}{X^B}}{1 - \frac{1}{X}} \end{aligned}$$

Avec toujours un auto-référencement de cette fonction sur B .

Pour compléter, $\mathfrak{I}(B)$ et B ne possédant que 2 “états” binaires, ces 2 variables peuvent être échangées dans la formule suivante :

$$\mathfrak{I}(B) = \frac{X^{\mathfrak{I}(B)} - 1}{X - 1}$$

nous pouvons alors écrire de manière équivalente :

$$B = \frac{X^B - 1}{X - 1} \quad (\text{avec } B = 1 \text{ si } X = 0)$$

Et en utilisant la formule précédente :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1 - \frac{1}{X^B}}{1 - \frac{1}{X}} \\ \Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{X^B}}{1 - \frac{1}{X}} &= \frac{X^B - 1}{X - 1} \\ \Rightarrow X^B &= 1 + X \cdot \left(1 - \frac{1}{X^B}\right) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $X = 1 - B$, nous avons :

$$\begin{aligned} B &= \frac{X^B - 1}{X - 1} \quad (\text{ici, l'égalité est bien respectée même lorsque } X = 0) \\ &= \frac{(1 - B)^B - 1}{(1 - B) - 1} \\ \Rightarrow -B^2 &= (1 - B)^B - 1 \\ \Rightarrow -B &= (1 - B)^B - 1 \\ \Rightarrow B &= 1 - (1 - B)^B \end{aligned}$$

De manière moins pertinente, pour X et $d \in \mathbb{N}^*$ et pour $X \neq d$, une autre formule est possible :

$$B = \frac{B \cdot (X - d)}{B \cdot X - d}$$

Remarque sur le cas “binaire” :

Nous pouvons reconstruire toutes les tables de vérités définies par l’algèbre de *BOOLE* grâce à la formule de $\mathfrak{I}(M)$. Par exemple en prenant 2 fois cette formule de $\mathfrak{I}(M)$ et en les dissociant comme si elles étaient de simples variables. Notons ces 2 nouvelles variables $\mathfrak{I}(M_1)$ et $\mathfrak{I}(M_2)$, et notons L une “porte logique” à 2 entrées $\mathfrak{I}(M_1)$ et $\mathfrak{I}(M_2)$.

* *Exemple 1 :*

$$L = \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) \quad (\text{symbole “} \cdot \text{” : } ET \text{ de l’algèbre de } BOOLE)$$

dont la table de vérité est la suivante :

$\mathfrak{I}(M_1)$	$\mathfrak{I}(M_2)$	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ce qui correspond à une porte logique “*ET*” en algèbre de *BOOLE*. D’un point de vue strictement mathématique (c’est-à-dire, maintenant, en écriture mathématique), nous pouvons écrire :

$$L = \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

* *Exemple 2 :*

$$L = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) \quad (\text{symbole “} + \text{” : } OU \text{ de l’algèbre de } BOOLE)$$

dont la table de vérité est la suivante :

$\mathfrak{I}(M_1)$	$\mathfrak{I}(M_2)$	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ce qui correspond à une porte logique “OU” en algèbre de *BOOLE*. D’un point de vue strictement mathématique (c’est-à-dire, maintenant, en écriture mathématique), nous pouvons écrire :

$$L = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - [\mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)]$$

Ce qui revient également à écrire :

$$L = [\mathfrak{I}(M_1) - \mathfrak{I}(M_2)]^2 + \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

En effet, puisque nous avons :

$$[\mathfrak{I}(M_1) - \mathfrak{I}(M_2)]^2 + \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = \mathfrak{I}(M_1)^2 + \mathfrak{I}(M_2)^2 - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

Or,

$$\mathfrak{I}(M)^m = \mathfrak{I}(M) \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}, m \geq 1.$$

D’où

$$[\mathfrak{I}(M_1) - \mathfrak{I}(M_2)]^2 + \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

Nous pouvons remarquer que nous aurions pu prendre d’autres “variables”. Par exemple, il en aurait été de même pour les variables $s(M_1)$ et $s(M_2)$ (possédant les mêmes propriétés que $s(M)$) à la place des variables $\mathfrak{I}(M_1)$ et $\mathfrak{I}(M_2)$ (respectivement). Ce qui permet de constater un lien possible entre les tables de vérité de l’algèbre de *BOOLE* et la formule $s(M)$ ou la formule $\mathfrak{I}(M)$, et donc un lien avec les propriétés des nombres entiers. Une interprétation entre l’algèbre de *BOOLE* et les propriétés des nombres entiers (propriété de primalité ou autres propriétés) est donc possible.

Remarque : Une interprétation entre l’algèbre de *BOOLE* et les propriétés d’autres nombres est aussi possible grâce à toutes fonctions dont les résultats ne peuvent être que 0 ou 1.

* Sur le même principe, poursuivons les correspondances avec d’autres exemples. Soient B_1 et B_2 deux variables binaires (ne pouvant prendre pour état que 0 ou 1).

* *Exemple 3 :*

$$L = \mathfrak{I}(M) \quad \text{avec } M = B_1.$$

Comme nous l'avons déjà vu au cours de ce paragraphe :

$$\mathfrak{I}(B) = 1 - B$$

Donc

$$\mathfrak{I}(B_1) = 1 - B_1$$

Ce qui correspond à une porte logique “*COMPLEMENT*” en algèbre de *BOOLE* (c'est-à-dire que la variable binaire de sortie est complémentaire à la variable binaire d'entrée).

* *Exemple 4 :*

$$L = \mathfrak{I}(M) \text{ avec } M = B_1.B_2 \text{ (symbole “.” : multiplication en mathématiques)}$$

dont la table de vérité est la suivante :

B_1	B_2	$L = \mathfrak{I}(B_1.B_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ce qui correspond à une porte logique “*NAND*” (c'est-à-dire *NON ET*) en algèbre de *BOOLE*. D'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{I}(B_1.B_2) = 1 - (B_1.B_2)$$

Remarquons que nous avons aussi (d'autres exemples sont possibles) :

$$\mathfrak{I}(B_1.B_2) = s(2 + B_1 + B_2)$$

Il est possible de généraliser cela en changeant de variable. A la place de B_1 et de B_2 , prenons respectivement $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 0$. Nous pouvons noter que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\ \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1.M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1.M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\ \mathfrak{I}(M_1.M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1.M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

D'où nous déduisons la formule générale :

$$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

De plus, à partir de l'équivalence $\mathfrak{I}(B_1.B_2) = 1 - (B_1.B_2)$, nous pouvons donner une dernière écriture généralisée :

$$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = 1 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)}.(M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

* *Exemple 5 :*

$L = \mathfrak{I}(M)$ avec $M = B_1 + B_2$ (symbole “ + ” : addition en mathématiques)

dont la table de vérité est la suivante :

B_1	B_2	$L = \mathfrak{I}(B_1 + B_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ce qui correspond à une porte logique “*NOR*” (c’est-à-dire *NON OU*) en algèbre de *BOOLE*. D’un point de vue strictement mathématique, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(B_1 + B_2) &= 2^{(B_1 \cdot B_2)} - (B_1 + B_2) \\ &= 1 - (B_1 + B_2) + (B_1 \cdot B_2)\end{aligned}$$

Or, nous pouvons également remarquer que (en algèbre de *BOOLE*) :

$\mathfrak{I}(B_1)$	$\mathfrak{I}(B_2)$	$L = \mathfrak{I}(B_1 + B_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

D’un point de vue strictement mathématique, nous pouvons déduire :

$$\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = \mathfrak{I}(B_1) \cdot \mathfrak{I}(B_2)$$

Remarquons que nous avons aussi (d’autres exemples sont possibles) :

$$\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = s(7 + B_1 + B_2)$$

Il est possible de généraliser cela en changeant de variable. A la place de B_1 et de B_2 , prenons respectivement $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 0$. Nous pouvons noter que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\ \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\ \mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

D'où nous déduisons la formule générale :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

De plus, à partir de l'équivalence $\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = 1 - (B_1 + B_2) + (B_1.B_2)$, nous pouvons donner une dernière écriture généralisée :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} - (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)} + (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)}. (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

Ce qui revient également à écrire :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1 - [(M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} - (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}]^2 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)}. (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

En effet puisqu'en développant les crochets élevés au carré, nous avons à traiter (pour M_1 , le principe étant le même pour M_2) :

$$(M_1)^{2.\mathfrak{J}(M_1)}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(M_1) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{J}(M_1) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (M_1)^{2.\mathfrak{J}(M_1)} &= (M_1)^{\mathfrak{J}(M_1)} = 0 && \text{pour } M_1 = 0 \\ (M_1)^{2.\mathfrak{J}(M_1)} &= (M_1)^{\mathfrak{J}(M_1)} = 1 && \text{pour } M_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'expliquer l'égalité donnée sous les 2 formes précédentes.

Remarque importante :

D'après le calcul propositionnel "classique", il est possible de former toutes les propositions à partir d'une unique porte logique tel que la porte logique *NOR*, ou bien à partir d'une unique porte logique tel que la porte logique *NAND*. Ainsi, le calcul propositionnel classique devient interprétable par $\mathfrak{J}(M)$ (ou par une formule similaire à $s(M)$) et les propriétés des nombres représentées par la variable M . Cela signifie que toutes les propositions du calcul propositionnel classique peuvent être formées à partir de la formule $\mathfrak{J}(M)$ tel que $M = B_1 + B_2$ ou tel que $M = B_1.B_2$.

Des correspondances peuvent être établies entre des formules ne pouvant prendre comme valeur que 0 ou 1, et des énoncés (en attribuant des valeurs de vérité tel que 0 et 1). Quelques cas sont développés dans la 1^{ière} **partie** du **Chapitre 5**.

Dernière remarque sur des cas particuliers :

Rapidement, dans le cadre de l'utilisation du nombre imaginaire “ i ” d'*EULER* (rappelons que “ $i = \sqrt{(-1)}$ ”) :

$$\begin{aligned}e^{i.\pi.\mathfrak{I}(M)} &= (-1)^{\mathfrak{I}(M)} \\&= 1 - 2.\mathfrak{I}(M) \\&= \sin \left[(-1)^{\mathfrak{I}(M)} . \frac{\pi}{2} \right]\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}(-1)^{\mathfrak{I}(M)} &= -1 && \text{si } M = 0 \\(-1)^{\mathfrak{I}(M)} &= 1 && \text{si } M > 0 \text{ et } M \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Ou bien,

$$\begin{aligned}e^{i.\pi.s(M)} &= (-1)^{s(M)} \\&= 1 - 2.s(M) \\&= \sin \left[(-1)^{s(M)} . \frac{\pi}{2} \right]\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}(-1)^{s(M)} &= -1 && \text{si } M \in \mathbb{P} \\(-1)^{s(M)} &= 1 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ et } M \in \mathbb{N}, M > 2\end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}e^{i.\pi.s(M)/2} &= (-1)^{s(M)/2} = i && \text{(un imaginaire pur) si } M \in \mathbb{P} \\e^{i.\pi.s(M)/2} &= (-1)^{s(M)/2} = 1 && \text{(un réel pur) si } M \notin \mathbb{P} \text{ et } M \in \mathbb{N}, M > 2\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi “séparer” les nombres entiers sur 2 axes : les nombres premiers sur l'axe des nombres imaginaires, et les nombres entiers non premiers sur l'axe des réels.

3.8 Autres formules intéressantes

Voici encore, exposées dans cette sous-partie, quelques formules liées aux nombres premiers qu'il est encore possible d'établir. Certaines pouvant permettre de réduire la longueur des calculs dûs à la factorielle ou dûs à un produit de nombres entiers consécutifs sur un intervalle donné.

La sous-partie “**3.8.5 Nombres factoriels, formule simplifiée $s(M)$ et divisibilité**” (page 212) montre qu'il est possible de simplifier les calculs de formules telles que $s(M)$.

La sous-partie “**3.8.6 Formule $f(M; x)$, puissance et divisibilité : Formule $D(N)$ généralisée**” (page 217) donne même une généralisation de la formule $D(N)$.

3.8.1 Nombres factoriels et divisibilité par P_n

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que (d'après les notations de la partie “**2 Démonstration complète**” page 43) :

$$(P_n - 1)! + 1 = P_n \cdot w_1$$

(Avec w_1 un nombre entier, cela signifie $[(P_n - 1)! + 1]$ divisible par P_n).

D'où :

$$\begin{aligned}(P_n - 1)! + 1 - P_n &= P_n \cdot w_1 - P_n \\ &= P_n \cdot (w_1 - 1) \quad (\text{c'est-à-dire encore divisible par } P_n)\end{aligned}$$

Mais nous avons aussi :

$$\begin{aligned}(P_n - 1)! + 1 - P_n &= (P_n - 1)! - (P_n - 1) \\ &= (P_n - 1) \cdot [(P_n - 2)!] - (P_n - 1) \\ &= (P_n - 1) \cdot [(P_n - 2)! - 1]\end{aligned}$$

Donc

$$(P_n - 1) \cdot [(P_n - 2)! - 1] = P_n \cdot (w_1 - 1)$$

Et donc

$$(P_n - 1) \cdot [(P_n - 2)! - 1] \text{ est divisible par } P_n \text{ puisque } P_n \cdot (w_1 - 1) \text{ l'est aussi.}$$

Or, dans un produit de 2 termes (en l'occurrence $(P_n - 1)$ et $[(P_n - 2)! - 1]$ sont ici ces 2 termes), l'ensemble est divisible par un nombre si au moins l'un des 2 est divisible par ce nombre. Comme $(P_n - 1)$ n'est pas divisible par P_n , $[(P_n - 2)! - 1]$ l'est forcément.

1^{ière} conclusion :

$$[(P_n - 2)! - 1] = P_n \cdot w_2$$

$$(\text{Avec } w_2 \text{ un nombre entier tel que } w_2 = \frac{(w_1 - 1)}{(P_n - 1)})$$

Et donc $[(P_n - 2)! - 1]$ est divisible par P_n .

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$[(P_n - 2)! - 1] \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Poursuivons le raisonnement :

Soit $m \in \mathbb{N}$, et d'après les notations précédentes, développons la formule suivante :

$$[(P_n - 2)! + 1] \cdot [(P_n - 2)!^{(m-1)} - 1] = (P_n - 2)!^{(m)} - (P_n - 2)! + (P_n - 2)!^{(m-1)} - 1$$

D'où

$$(P_n - 2)!^{(m)} - 1 = [(P_n - 2)! + 1] \cdot [(P_n - 2)!^{(m-1)} - 1] + (P_n - 2)! - (P_n - 2)!^{(m-1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} & (P_n - 2)!^{(m)} - 1 \\ &= [(P_n - 2)! + 1] \cdot [(P_n - 2)!^{(m-1)} - 1] - (P_n - 2)! \cdot [(P_n - 2)!^{(m-2)} - 1] \end{aligned}$$

Or, pour $m = 2$, nous retrouvons notre expression de départ à droite de l'égalité :

$$[(P_n - 2)! - 1] \quad \text{qui est divisible par } P_n,$$

ce qui implique ensuite tous les cas suivants pour m (le fait que la formule soit valable pour un cas la rend valable pour le cas suivant, et ainsi de suite pour chaque cas suivant). En effet, il faut observer $(P_n - 2)!^{(m-1)}$ et $(P_n - 2)!^{(m-2)}$, qui permet d'étendre le raisonnement à tous les autres cas de m (en incrémentant d'une unité successivement et à l'infini la puissance de $(P_n - 2)!$). Le premier membre de l'égalité étant divisible par P_n implique que le second le soit aussi.

2^{ième} conclusion :

Le cas $m = 1$ venant d'être traité dans la "1^{ère} conclusion", nous pouvons maintenant conclure que :

$$(P_n - 2)!^m - 1 = P_n \cdot w_{2'} \quad (\text{Avec } w_{2'} \text{ un nombre entier})$$

Et donc $[(P_n - 2)!^m - 1]$ est divisible par P_n .

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$[(P_n - 2)!^m - 1] \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Si nous considérons que 0 fait partie des multiples de P_n , nous pouvons alors étendre le domaine de définition de m à $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$. En effet, puisque pour $m = 0$ (et donc $w_{2'} = 0$), l'égalité est bien respectée.

Tout ceci sous-entend que, pour les congruences, il est possible de réduire les calculs utilisant les nombres premiers dans les factoriels (nous sommes passés de $(P_n - 1)!$ à $(P_n - 2)!$).

Complément :

En supposant que P_n ne soit pas connu, en notant M une variable qui représente ce nombre inconnu, en remplaçant P_n par M dans la formule, pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, nous avons :

- Si $M \in \mathbb{P}$, le même résultat que précédemment, c'est-à-dire :

$$\frac{(M-2)!^m}{M} = W_{2'} + \frac{1}{M} \quad (\text{Avec } w_{2'} \text{ un nombre entier})$$

Donc

$$\sin^2 \left(\pi \cdot \frac{(M-2)!^m}{M} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

Et donc :

$$\frac{\sin^2 \left(\pi \cdot \frac{(M-2)!^m}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

- Si $M \notin \mathbb{P}$, cela signifie que M est un nombre composé, notons :

Avec P_1, P_2, P_3, \dots et $P_n \in \mathbb{P}$, avec $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$ et avec au moins 2 des termes $\alpha_n \geq 1$ (en rappelant que pour M défini ainsi, nous avons nécessairement $P_n < M$) :

$$M = P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} . P_3^{\alpha_3} \dots P_n^{\alpha_n}$$

En développant, et comme $(M-1)$ ne peut pas être un de ces nombres premiers, nous retrouvons forcément tous les facteurs premiers de M dans cette formule :

$$\frac{(M-2)!^m}{M} = \frac{[(P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} . P_3^{\alpha_3} \dots P_n^{\alpha_n}) . k_0]^m}{M}$$

Où k_0 est un nombre entier qui représente les nombres que l'on ne retrouve pas dans la décomposition de M en produit de facteurs premiers. Le résultat de cette formule ne peut donc être qu'un nombre entier puisque le numérateur contient l'intégralité des facteurs premiers de M et de leur puissance respectives, ce qui est égale à M , c'est-à-dire le numérateur.

ATTENTION :

Ceci n'est pas valable dans un seul cas, c'est le cas de $M = 4$, le défaut évoqué dans la partie démonstration, pour les mêmes raisons, nous devons donc restreindre m tel que $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Revenons en au cas de $M \notin \mathbb{P}$, cela signifie donc que :

$$\frac{(M-2)!^m}{M} = k_1 \quad (\text{avec } k_1 \text{ un nombre entier})$$

D'où

$$\sin^2 \left(\pi \cdot \frac{(M-2)!^m}{M} \right) = 0$$

Et donc :

$$\frac{\sin^2 \left(\pi \cdot \frac{(M-2)!^m}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

Ce qui est strictement équivalent à la formule $s(M)$, pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left(\pi \cdot \frac{(M-2)!^m}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Ce qui ne permet de réduire les calculs que sensiblement.

Remarque :

D'après les démonstrations du complément, nous aurions pu nous servir des résultats concernant cette formule pour élaborer la formule $D(N)$ de décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers.

3.8.2 Produit de nombres factoriels et divisibilité par P_n

Soit $P_n \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq a \leq P_n$, nous pouvons écrire ceci :

$$\begin{aligned}
 0!. (P_n - 1)! &= 0!. P_n. (P_n - 2)! - 1!. (P_n - 2)! \\
 1!. (P_n - 2)! &= 1!. P_n. (P_n - 3)! - 2!. (P_n - 3)! \\
 2!. (P_n - 3)! &= 2!. P_n. (P_n - 4)! - 3!. (P_n - 4)! \\
 3!. (P_n - 4)! &= 3!. P_n. (P_n - 5)! - 4!. (P_n - 5)! \\
 4!. (P_n - 5)! &= 4!. P_n. (P_n - 6)! - 5!. (P_n - 6)! \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Et de manière générale, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 (a - 1)!. (P_n - a)! &= (a - 1)!. (P_n - a). (P_n - a - 1)! \\
 &= (a - 1)!. P_n. (P_n - a - 1)! - a!. (P_n - a - 1)!
 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$a!. (P_n - a - 1)! = (a - 1)!. P_n. (P_n - a - 1)! - (a - 1)!. (P_n - a)!$$

D'après le théorème de *WILSON* :

$$(P_n - 1)! = P_n. w_1 - 1 \quad (\text{avec } w_1 \text{ un nombre entier})$$

Et donc

$$0!.(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1$$

$$\begin{aligned} 1!.(P_n - 2)! &= 0!.P_n.(P_n - 2)! - 0!.(P_n - 1)! \\ &= P_n.[0!.(P_n - 2)! - w_1] + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2!.(P_n - 3)! &= 1!.P_n.(P_n - 3)! - 1!.(P_n - 2)! \\ &= P_n.[1!.(P_n - 3)! - 0!.(P_n - 2)! + w_1] - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3!.(P_n - 4)! &= 2!.P_n.(P_n - 4)! - 2!.(P_n - 3)! \\ &= P_n.[2!.(P_n - 4)! - 1!.(P_n - 3)! + 0!.(P_n - 2)! - w_1] + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4!.(P_n - 5)! &= 3!.P_n.(P_n - 5)! - 3!.(P_n - 4)! \\ &= P_n.[3!.(P_n - 5)! - 2!.(P_n - 4)! + 1!.(P_n - 3)! - 0!.(P_n - 2)! + w_1] - 1 \end{aligned}$$

...

Le signe de w_1 dans les crochets et de “ 1 ” à l’extérieur des crochets dépend directement de la parité de a . Et de manière générale, comme nous avons :

$$a!.(P_n - a - 1)! = (a - 1)!.P_n.(P_n - a - 1)! - (a - 1)!.(P_n - a)!$$

Nous avons donc aussi (en substituant $(a - 1)$ à a) :

$$(a - 1)!.(P_n - a)! = (a - 2)!.P_n.(P_n - a)! - (a - 2)!.(P_n - a + 1)!$$

Or, en substituant $(a - 1)$ à a dans l’égalité précédente, nous obtenons une nouvelle égalité pour les derniers termes de cette égalité :

$$(a - 2)!.(P_n - a + 1)! = (a - 3)!.P_n.(P_n - a + 1)! - (a - 3)!.(P_n - a + 2)!$$

En remplaçant $(a - 2)!.(P_n - a + 1)!$ dans l’avant dernière égalité par la dernière égalité que nous venons d’obtenir, nous déduisons :

$$\begin{aligned} &(a - 1)!.(P_n - a)! \\ &= (a - 2)!.P_n.(P_n - a)! - (a - 3)!.P_n.(P_n - a + 1)! + (a - 3)!.(P_n - a + 2)! \end{aligned}$$

En substituant $(a - 1)$ à a dans l'égalité de

$$(a - 2)!.(P_n - a + 1)!$$

Nous trouverons une nouvelle égalité qui remplacera une fois encore les derniers termes, et en agissant ainsi jusqu'au tout dernier terme de la somme, nous pouvons déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned}(a - 1)!.(P_n - a)! &= (a - 2)!..P_n.(P_n - a + 0)! - (a - 3)!..P_n.(P_n - a + 1)! \\ &+ (a - 4)!..P_n.(P_n - a + 2)! - (a - 5)!..P_n.(P_n - a + 3)! \\ &+ (a - 6)!..P_n.(P_n - a + 4)! - (a - 7)!..P_n.(P_n - a + 5)! \\ &+ \dots \\ &\pm (a - 2 - b)!.(P_n - a + b)!\end{aligned}$$

Le dernier terme de la somme étant atteint lorsqu'il vaut $0!.(P_n - 1)!$, c'est-à-dire lorsque $b = (a - 2)$ (implicitement b , est un nombre entier), donc lorsque :

$$(a - 2 - b)!.(P_n - a + b)! = 0!.(P_n - 1)!$$

Le signe de ce dernier terme dépendant du nombre "d'égalités" dont nous aurons eu besoin pour l'atteindre, ce qui dépend directement de la valeur de a . En effet, si a est paire le dernier terme sera négatif, si a est impaire, le dernier terme sera positif (l'exemple le plus simple étant donné pour $a = 1$). Comme l'avant dernier terme est du signe contraire du dernier terme :

$$\begin{aligned}(a - 1)!.(P_n - a)! &= (a - 2)!..P_n.(P_n - a + 0)! - (a - 3)!..P_n.(P_n - a + 1)! \\ &+ (a - 4)!..P_n.(P_n - a + 2)! - (a - 5)!..P_n.(P_n - a + 3)! \\ &+ (a - 6)!..P_n.(P_n - a + 4)! - (a - 7)!..P_n.(P_n - a + 5)! \\ &+ \dots \\ &- (-1)^{(a-1)}.0!..P_n.(P_n - 2)! + (-1)^{(a-1)}.0!.(P_n - 1)!\end{aligned}$$

Sachant que :

$$0!.(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1$$

Nous avons donc

$$(-1)^{(a-1)}.0!.(P_n - 1)! = (-1)^{(a-1)}.P_n.w_1 - (-1)$$

Nous pouvons alors déduire :

$$\begin{aligned} (a-1)!.(P_n - a)! &= P_n.[(a-2)!.(P_n - a + 0)! - (a-3)!.(P_n - a + 1)! \\ &\quad + (a-4)!.(P_n - a + 2)! - (a-5)!.(P_n - a + 3)! \\ &\quad + (a-6)!.(P_n - a + 4)! - (a-7)!.(P_n - a + 5)! \\ &\quad + \dots \\ &\quad - (-1)^{(a-1)}.0!.(P_n - 2)! + (-1)^{(a-1)}.w_1] - (-1)^{(a-1)} \end{aligned}$$

Et donc, en vue d'une généralisation (précisons que ce qui suit étant valable seulement si $a \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq a \leq P_n$ car pour le cas de $a = 1$, nous avons directement $0!.(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1$), pour $2 \leq a \leq P_n$:

$$\begin{aligned} &(a-1)!.(P_n - a)! \\ &= P_n. \left[(-1)^{(a-1)}.w_1 + \sum_{b=0}^{b=(a-2)} (-1)^b.(a-2-b)!.(P_n - a + b)! \right] - (-1)^{(a-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a-1)!.(P_n - a)! + (-1)^{(a-1)} \\ &= P_n. \left[(-1)^{(a-1)}.w_1 + \sum_{b=0}^{b=(a-2)} (-1)^b.(a-2-b)!.(P_n - a + b)! \right] \end{aligned}$$

D'où l'on déduit la divisibilité :

$$(a-1)!.(P_n - a)! + (-1)^{(a-1)} \quad \text{est divisible par } P_n.$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(a-1)!.(P_n - a)! + (-1)^{(a-1)} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Cas particulier :

Dans le cas où $a = \frac{(P_n + 1)}{2}$ et avec P_n impaire seulement (c'est-à-dire $P_n \geq 3$), nous avons :

$$(a - 1)! \cdot (P_n - a)! + (-1)^{(a-1)} = \left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!^2 + (-1)^{\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)}$$

D'où

$$\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!^2 + (-1)^{\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)} \quad \text{est divisible par } P_n \text{ (avec } P_n \geq 3\text{)}.$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!^2 + (-1)^{\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)} \equiv 0 \quad (\text{mod } P_n)$$

Remarquons que $a = \frac{P_n + 1}{2}$ permet de réduire le plus possible les calculs de manière à ce que les valeurs résultantes de la factorielle (c'est-à-dire $\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!$) soient au minimum : pour ce cas, les calculs sont optimisés.

3.8.3 Puissance de nombres factoriels et divisibilité par P_n

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que :

$$(P_n - 1)! + 1 = P_n \cdot w_1$$

(Avec w_1 un nombre entier, donc $[(P_n - 1)! + 1]$ divisible par P_n).

Notons :

$$X = (P_n - 1)!$$

Nous avons :

$$(P_n - 1)! + 1 = X + 1 = P_n \cdot w_1$$

Démarche :

Pour $m \in \mathbb{N}$, toute expression de la forme X^m peut s'écrire :

$$X^{2a} \quad \text{si } m \text{ est paire (c'est-à-dire } m = 2a)$$

ou

$$X^{(2a+1)} \quad \text{si } m \text{ est impaire (c'est-à-dire } m = 2a + 1)$$

Cas où m est paire :

$$X^{2a} - 1 = X \cdot (X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1)$$

Cas où m est impaire :

$$X^{(2a+1)} + 1 = X \cdot (X^{2a} - 1) + (X + 1)$$

Raisonnement :

- D'après les égalités des 2 cas m paire et m impaire, nous pouvons réécrire d'une part pour le cas de m impaire :

$$\begin{aligned} X^{(2a+1)} + 1 &= X.(X^{2a} - 1) + (X + 1) \\ &= X.[X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1)] + (X + 1) \end{aligned}$$

Ou encore,

$$X^{(2a+1)} + 1 = X^{[2(a+1)-1]} + 1$$

Et

$$X^{[2(a+1)-1]} + 1 = X.[X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1)] + (X + 1)$$

Pour $a = 0$, nous retrouvons notre expression de départ $(X + 1)$ qui est divisible par P_n , ce qui implique ensuite tous les cas suivants pour a impaire (le fait que la formule soit valable pour un cas la rend valable pour le cas suivant, et ainsi de suite pour chaque cas suivant, il suffit ici de comparer $(a + 1)$ dans le membre de gauche à a dans le membre de droite pour s'en rendre compte directement). En effet, il faut observer $X^{[2(a+1)-1]}$, qui permet d'incrémenter d'une unité successivement et à l'infini la puissance de X , ce qui étend le raisonnement à tous les autres cas de a impaire.

- D'après les égalités des 2 cas m paire et m impaire, nous pouvons réécrire d'autre part pour le cas de m paire :

$$\begin{aligned} X^{2a} - 1 &= X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1) \\ &= X.[X.(X^{(2a-2)} - 1) + (X + 1)] - (X + 1) \end{aligned}$$

Ou encore,

$$X^{2(a+1)} - 1 = X.[X.(X^{2a} - 1) + (X + 1)] - (X + 1)$$

Pour $a = 0$, l'expression du membre de droite est divisible par P_n , ce qui implique ensuite tous les cas suivants pour a paire (le fait que la formule soit valable pour un cas la rend valable pour le cas suivant, et ainsi de suite pour

chaque cas suivant, il suffit ici de comparer $(a+1)$ dans le membre de gauche à a dans le membre de droite pour s'en rendre compte directement). En effet, il faut observer $X^{2(a+1)}$, qui permet d'incrémenter d'une unité successivement et à l'infini la puissance de X , ce qui étend le raisonnement à tous les autres cas de a paire.

Conclusion :

Nous pouvons regrouper ces 2 cas en un seul. Comme nous avons noté $X = (P_n - 1)!$, nous pouvons généraliser ainsi :

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ (et en admettant que 0 soit divisible par P_n , puisque le résultat de $\frac{0}{P_n}$ donne un nombre entier qui vaut 0),

$$(P_n - 1)!^m + (-1)^{(m+1)} \quad \text{est divisible par } P_n.$$

Ou encore (ce qui suit est strictement équivalent) :

$$(P_n - 1)!^m - (-1)^m \quad \text{est divisible par } P_n.$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(P_n - 1)!^m - (-1)^m \equiv 0 \quad (\text{mod } P_n)$$

3.8.4 Puissances de nombres factoriels contenant une puissance

Nous avons noté :

$$\varepsilon_{n,x,t} = P_n \cdot w_6 + (-1)^x$$

pour tout $P_n \in \mathbb{P}$, pour tout x et $t \in \mathbb{N}$ tels que $x \geq 1$ et $x \geq 1$, et avec w_6 un nombre entier. Or,

$$\frac{\prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x - h)}{P_n \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right)^{-x}} = \varepsilon_{n,x,t} \quad (\text{un nombre entier non divisible par } P_n)$$

Nous allons maintenant nous demander ce qu'il en est de la divisibilité par P_n pour $(\varepsilon_{n,x,t})^m$ avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $\varepsilon_{n,x,t}$ possédant toutes les propriétés vues précédemment. Comme dans la partie “**2 démonstration**” (page 43), nous allons simplifier les résultats pour alléger l'écriture :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{n,x,t})^m &= [P_n \cdot w_6 + (-1)^x]^m \\ &= (P_n \cdot w_6) \cdot f(P_n \cdot w_6) + (-1)^{(x \cdot m)} \end{aligned}$$

En notant $(w_6) \cdot f(P_n \cdot w_6) = w$ (avec w un “nombre entier polynômiale” en fonction de P_n et de w_6 , tel que défini au début du paragraphe “**Suite 2 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$** ” de la sous-partie “**2.2.2 Début de l'étude**” page 53), nous obtenons :

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m = P_n \cdot w + (-1)^{(x \cdot m)}$$

Et donc

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m - (-1)^{(x \cdot m)} = P_n \cdot w$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m - (-1)^{(x \cdot m)} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

* *Remarque 1 :*

Si nous considérons que 0 ne fait pas partie des multiples de P_n , nous devons alors restreindre le domaine de définition de m à $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

Si nous considérons que 0 fait partie des multiples de P_n , nous pouvons alors étendre le domaine de définition de m à $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$. En effet, puisque pour $m = 0$ (et donc $w = 0$), l'égalité est bien respectée.

* *Remarque 2 :*

Nous avons noté

$$\varepsilon_{n,x,t} = \frac{\prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t.P_n^x - h)}{P_n \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right)^{-x}}$$

Dans le cas particulier de $x = 1, t = 1$ et $m = 2$, nous pouvons retrouver la formule de *MINÁC – WILLANS* car :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{n,1,1})^2 &= (P_n - 1)!^2 \\ &= P_n \cdot w + 1 \\ \frac{(\varepsilon_{n,1,1})^2}{P_n} &= w + \frac{1}{P_n} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(\varepsilon_{n,1,1})^2}{P_n} \right] &= \sin^2 \left[\pi \cdot \left(w + \frac{1}{P_n} \right) \right] \\ &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(\varepsilon_{n,1,1})^2}{P_n} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 1$$

Et donc la formule de *MINÁČ – WILLANS* :

$$\frac{\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(P_n - 1)!^2}{P_n} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 1$$

* *Remarque 3* :

Le fait d'élever la factorielle au carré permet d'éliminer le problème de $P_n = 4$ lorsque $x = 1$. En effet, lors du “**(développement 2)**” de la sous-partie “**2.2.2 Début de l'étude**” (page 53), nous avons soulevé et résolu ce problème. De la même manière, nous pouvons encore ici effectuer une vérification des conditions nécessaires pour éviter ce problème.

Nous voulons :

$$P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) \cdot m} \geq P_n^x$$

Donc

$$\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) \cdot m \geq x$$

ici, pour $x = 2$, nous avons (après simplifications) :

$$P_n \geq 1 + \frac{2}{m}$$

Ce qui est effectivement le cas si $m \geq 2$.

Continuons alors les vérifications pour $x \geq 3$, nous avons noté :

$$\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) . m \geq x$$

Et donc

$$\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right) . m - x . (m + 1) \geq 0$$

Le plus petit nombre premier étant 2, nous avons :

$$\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right) . m - x . (m + 1) \geq \left(\frac{2^x - 1}{2 - 1} \right) . m - x . (m + 1)$$

Or, pour $x \geq 3$:

$$\begin{aligned} 2^x > 2.x + 1 &\geq \left(1 + \frac{1}{m} \right) . x + 1 && \text{pout tout } m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \\ 2^x &> \left(1 + \frac{1}{m} \right) . x + 1 \\ 2^x - 1 - x.(1 + 1/m) &> 0 \\ \frac{2^x - 1}{2 - 1} . m - x.(m + 1) &> 0 \end{aligned}$$

Et donc

$$\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right) . m - x . (m + 1) > 0$$

Ce qui est une condition nécessaire pour éviter tout problème d'incohérence, cela nous permettant de conclure :

dès que $m \geq 2$, il n'y a plus de défaut tel que celui pour $m = 1$, $P_n = 4$, $x = 1$. Nous avons donc toujours, pour $m \geq 2$:

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m - (-1)^{(x.m)} = P_n . w$$

Donc

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_{n,x,t})^m &= P_n \cdot w + (-1)^{(x.m)} \\
 \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot (\varepsilon_{n,x,t})^m}{P_n} \right) &= \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot (w + (-1)^{(x.m)})}{P_n} \right) \\
 &= \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot (-1)^{(x.m)}}{P_n} \right) \\
 &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)
 \end{aligned}$$

Et donc finalement, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot (\varepsilon_{n,x,t})^m}{P_n} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 1$$

Ce qui aurait aussi pu servir de base à notre grande formule de décomposition $D(N)$.

3.8.5 Nombres factoriels, formule simplifiée $s(M)$ et divisibilité

Pour compléter ce que nous venons de voir précédemment, prenons ce qui suit en considération. Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, nous avons :

$$(M-1)!^m = M.w_0 \quad \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ (avec } w_0 \text{ un nombre entier variable)}$$

(voir paragraphe “(*développement 1*)” de la sous-partie “**2.2.2 Début de l’étude**” page 53, pour la démonstration)

Et

$$(M-1)!^m = M.w_0 + (-1)^m \quad \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ (avec } w_0 \text{ un nombre entier variable)}$$

Or, nous savons que (voir la partie “**3.1 Formule simplifiée $s(M)$** ” page 139, concernant la formule $s(M)$ pour rappels) :

$$\begin{aligned} s(M) &= 0 & \text{si } M \notin \mathbb{N} \\ s(M) &= 1 & \text{si } M \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire de ces 2 cas une formule plus générale :

$$(M-1)!^m = M.w_0 + s(M).(-1)^m$$

(en effet, nous vérifions facilement que nous retrouvons bien les 2 cas précédents)

Et donc

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0$$

Ce qui permet de conclure que $\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M}$ vaut toujours un nombre entier.

En arithmétique modulaire, cela s’écrit :

$$(M-1)!^m - s(M).(-1)^m \equiv 0 \pmod{M}$$

Remarquons que nous aurions pu raisonner de la même manière en remplaçant P_n par M avec $\varepsilon_{n,x,t}$ ou avec :

$$(P_n - 2)!^m - 1 = w_{2'}$$

(vu en paragraphe “**3.8.1 Nombres factoriels et divisibilité par P_n** ”
page [194](#))

Nous aurions pu déduire (le principe du raisonnement est le même) :

$$(M - 2)!^m - s(M) \equiv 0 \pmod{M} \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

Mais reprenons le raisonnement depuis :

$$\frac{(M - 1)!^m - s(M) \cdot (-1)^m}{M} = w_0 \quad \text{et poursuivons.}$$

A partir de cette égalité, nous pouvons facilement en donner une autre :

$$\frac{(M - 1)!^m - s(M) \cdot (-1)^m}{M} + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M} = w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M} \quad \text{avec } a \in \mathbb{N}$$

Donc

$$\frac{(M - 1)!^m + [(-1)^a - s(M)] \cdot (-1)^m}{M} = w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{(M - 1)!^m + [(-1)^a - s(M)] \cdot (-1)^m}{M} \right\} &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \left[w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M} \right] \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{(-1)^{(m+a)}}{M} \right\} \\ &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \end{aligned}$$

Pour conclure, quelquesoit M et $m \in \mathbb{N}$, tels que $M \geq 2$ et $m \geq 2$, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)] \cdot (-1)^m}{M} \right\} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

Nous pouvons même ajouter quelques conditions pour lesquels la cohérence de cette formule est respectée (en accord avec les remarques vues tout au long de ce chapitre) :

- CONDITION 1 :

La cohérence est respectée :

- ▷ Quelquesoit $m \in \mathbb{N}$, tel que $m \geq 2$,
- ▷ Quelquesoit $M \in \mathbb{N}$, tel que $M \geq 2$,
- ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- CONDITION 2 :

La cohérence est respectée :

- ▷ Pour $m = 1$ (dans ce cas, un défaut apparaît lorsque $M = 4$ seulement, c'est pour cela que cette valeur de M doit être évitée),
- ▷ Quelquesoit $M \geq 2$ telle que $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (notamment à cause du défaut constaté et relaté lors de l'étude de la “**fonction de Correction A**” de la sous-partie “**2.2.4 Supposons Pn non connu (construction de Fp, suite)**” page 120),
- ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- CONDITION 3 :

La cohérence est respectée :

- ▷ Pour $m = 0$,
- ▷ Pour $M \in \mathbb{P}$ uniquement,
- ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

Cette dernière condition mérite quelques explications. En effet, lorsque $m = 0$, nous avons :

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)] \cdot (-1)^m}{M} \right\} = \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{1 + (-1)^a - s(M)}{M} \right\}$$

Si a est paire, nous avons :

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{1 + (-1)^a - s(M)}{M} \right\} = \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{2 - s(M)}{M} \right\}$$

Or, d'après ce que nous avons conclu, nous devons avoir :

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{2 - s(M)}{M} \right\} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

Ce qui est effectivement le cas seulement si $s(M) = 1$, autrement dit seulement si $M \in \mathbb{P}$.

Et si a est impaire, nous avons :

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{1 + (-1)^a - s(M)}{M} \right\} = \sin^2 \left\{ -\pi \cdot \frac{s(M)}{M} \right\}$$

Or, d'après ce que nous avons conclu, nous devons avoir :

$$\sin^2 \left\{ -\pi \cdot \frac{s(M)}{M} \right\} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

Ce qui est effectivement le cas seulement si $s(M) = 1$, autrement dit seulement si $M \in \mathbb{P}$.

Ce qui permet d'établir la “*CONDITION 3*” , qui précise que pour $m = 0$, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous devons avoir uniquement $M \in \mathbb{P}$.

Remarque 1 :

Pour les mêmes raisons, ces 3 conditions sont également valables pour la formule vue précédemment, c'est-à-dire pour :

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0$$

Remarque 2 :

Etant donné la formule établie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0$$

Le développement en séries entières de *TAYLOR – MACLAURIN* des fonctions “*SINUS*” contenues dans la formule $s(M)$ permet de donner une équivalence au nombre entier w_0 en fonction de nombres entiers seulement.

3.8.6 Formule $f(M;x)$, puissance et divisibilité : Formule $D(N)$ généralisée

Pour poursuivre ce raisonnement, nous pouvons aborder cette partie en rappelant quelques résultats de la sous-partie “2.2 Démonstration complète”.

IMPORTANT :

Nous reprendrons les mêmes notations que dans la sous-partie “2.2 Démonstration complète” page 45 (notamment pour les entiers symbolisés par des lettres).

Nous avons noté :

$$F_p = \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h)$$

Et

$$M^{F_c} = M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1}^{-x+1}\right)}$$

Et donc (ce qui est une partie de la formule de α_M , vue page 131)

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h)}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1}^{-x+1}\right)}}$$

Rappelons aussi que nous avons noté :

$$f(M; x) = \cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Dont les résultats suivants ont déjà été démontrés pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$:

$f(M; x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .
 $f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x .
 $f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelsoit $N \geq 1$.

Ces résultats provenaient déjà de résultats intermédiaires qu'il est aussi important de rappeler (en suivant le même ordre) :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{F_p}{P_n^{F_c}} = w_6 + \frac{(-1)^x}{P_n}$$

(où w_6 est un nombre entier et $P_n \in \mathbb{P}$)

Dans ce cas, ceci est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = w_6 + \frac{(-1)^x}{M}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{F_p}{P_n^{F_c}} = E$$

(où E est un nombre entier)

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = G' . \varepsilon_{M,x}$$

(G' est un nombre entier, $\varepsilon_{M,x}$ entier sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$)

En adoptant une nouvelle écriture afin de la réduire, nous pouvons remplacer toutes les lettres représentant un nombre entier (tel que w_6 , E et $G'.\varepsilon_{M,x}$) par une lettre unique (avec une la lettre en indice se rapportant à la puissance m) tel que W_m (qui est par conséquent un nombre entier), ce qui permet de noter :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = W_m + \frac{(-1)^x}{M}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m + (-1)^x$$

Avec :

$$M^{(F_c-1)} = M \left(\frac{M^x - 1}{M - 1} \right)^{-x}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = W_m$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = W_m \quad (\text{sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m \quad (\text{sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Maintenant, poursuivons le raisonnement en notant $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$ et développons ceci :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\begin{aligned} \left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m &= [M.W_m + (-1)^x]^m \\ &= (M.W_m).f(M.W_m) + (-1)^{(x.m)} \end{aligned}$$

En notant W un nombre entier tel que, dans ce cas :

$$(W_m).f(M.W_m) = W$$

(avec, pour alléger le développement, W un nombre entier “polynômiale” en fonction de M et de W_m , tel que défini dans le paragraphe “**Suite 2 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$** ” de la sous-partie “**2.2.2 Début de l’étude**” page 53)

Nous obtenons :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m = M.W + (-1)^{(x.m)}$$

Et donc

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - (-1)^{(x.m)} = M.W$$

En arithmétique modulaire, cela s’écrit :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - (-1)^{(x.m)} \equiv 0 \quad (\text{mod } M)$$

(dans ce cas précis où $M \in \mathbb{P}$, et où N est un multiple de M^x)

Rappelons que, dans ce cas :

$$f(M; x) = 1 \quad (\text{ce qui permettra de faire la synthèse finale})$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x ,
Ou bien pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m$$

(nous avons déterminé que le défaut pour $M = 4$ et $x = 1$ est éliminé dès que $m \geq 2$, il existe seulement pour $m = 1$)

Donc

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m = [M.W_m]^m$$

Or,

$$[M.W_m]^m = M.[M^{(m-1)}.W_m^m]$$

Ce qui est clairement un nombre divisible par M (puisque nous sommes dans le cas où $m \geq 2$).

En notant ici comme précédemment W ce nombre entier (l'intérêt de ne prendre qu'une seule lettre pour représenter un nombre entier est notable pour la conclusion intermédiaire qui va suivre) tel que :

$$W = [M^{(m-1)}.W_m^m]$$

Nous obtenons :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m = M.W$$

Rappelons que, dans ces 2 cas :

$$f(M; x) = 0 \quad (\text{ce qui permettra de faire la synthèse finale})$$

Conclusion intermédiaire :

En regroupant les résultats obtenus précédemment, nous avons (W est un nombre variable, mais toujours un nombre entier) :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - (-1)^{(x.m)} = M.W$$

D'où

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} = W + \frac{(-1)^{(x.m)}}{M}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x ,
Ou bien pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m = M.W$$

D'où

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} = W$$

Cela va nous permettre de conclure. En effet, W ne pouvant représenter qu'un nombre entier dans tous les cas.

Reprenons les 2 cas abordés dans notre “*Conclusion intermédiaire*” :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\begin{aligned} \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} \right\} &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \left[W + \frac{(-1)^{(x.m)}}{M} \right] \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{(-1)^{(x.m)}}{M} \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{M} \right\} \end{aligned}$$

Et donc, dans ce cas :

$$\frac{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} \right\}}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

C'est-à-dire la même valeur que $f(M; x)$ pour le même cas.

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x ,
Ou bien pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} \right\} &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et donc, dans ce cas :

$$\frac{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} \right\}}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

C'est-à-dire la même valeur que $f(M; x)$ pour le même cas.

Tout ceci nous permet maintenant de conclure que, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$\frac{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m}{M} \right\}}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = f(M; x)$$

Ainsi, il devient possible d'établir une nouvelle formule plus générale pour la décomposition d'un nombre entier $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ en produit de facteurs premiers. Nous avons noté $D(N)$ une telle formule, celle-ci contenant la formule $f(M; x)$ que nous pouvons maintenant remplacer par l'équivalent que nous venons de donner. En effet, rappelons que :

$$\alpha_M = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x)$$

Et que :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M^{(\alpha_M)} = \prod_{M=2}^{M=N} M^{(\alpha_M)}$$

Ce qui permet de déduire finalement que, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$$D(N) = N = \prod_{M=2}^{M=N} M \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M \left(\frac{M^x-1}{M-1} \right)^{-x}} \right)^m \cdot \frac{\pi}{M} \right] \right\}$$

Ce qui est une formule plus générale pour la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers (attention, il s'agit bien de crochets dans cette formule, et non des symboles des "valeurs absolues", ni de ceux des "parties entières", ils ont la même fonction que de simples parenthèses). La généralisation de la formule $D(N)$ permet donc également de généraliser le "Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers" (page 137), sans en modifier les caractéristiques dues au domaine de définition de N (nous avons toujours $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$).

Synthèse finale :

Dans la sous-partie précédente (“**3.8.5 Nombres factoriels, formule simplifiée $s(M)$ et divisibilité**” page 212), nous avons pu faire un lien entre $s(M)$ et le reste de la formule. De manière identique, nous pouvons dans cette partie établir un lien entre la formule $f(M; x)$ et les formules que nous venons de voir :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m = M.W + f(M; x).(-1)^{(x.m)}$$

D'où

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - f(M; x).(-1)^{(x.m)}}{M} = W$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - f(M; x).(-1)^{(x.m)} \equiv 0 \pmod{M}$$

Comme pour la partie précédente, et pour des raisons similaires, la cohérence de ces formules est respectée dans 3 conditions :

- CONDITION 1 :

- ▷ Quelquesoit $m \in \mathbb{N}$, tel que $m \geq 2$,
- ▷ Quelquesoit $M \in \mathbb{N}$, tel que $M \geq 2$,
- ▷ Quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 1$.

- CONDITION 2 :

- ▷ Pour $m = 1$ (dans ce cas, un défaut apparaît lorsque $M = 4$ seulement, cette valeur de M doit donc être évitée),
- ▷ Quelquesoit $M \geq 2$ telle que $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (à cause du défaut relaté),
- ▷ Quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 1$.

- CONDITION 3 :

- ▷ Pour $m = 0$,
- ▷ Pour $M \in \mathbb{P}$ uniquement,
- ▷ Pour N multiple de M^x uniquement.

Il est encore possible ici de donner une autre expression de cette formule (les conditions que nous venons de donner y seront toujours respectées). En effet, en reprenant :

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - f(M; x) \cdot (-1)^{(x.m)}}{M} = W$$

Avec $a \in \mathbb{N}$, nous pouvons facilement établir que :

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m - f(M; x) \cdot (-1)^{(x.m)}}{M} + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M} = W + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M}$$

Donc

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m + [(-1)^a - f(M; x)] \cdot (-1)^{(x.m)}}{M} = W + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m + [(-1)^a - f(M; x)] \cdot (-1)^{(x.m)}}{M} \right\} &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \left[W + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M} \right] \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M} \right\} \\ &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \end{aligned}$$

Pour finir, dans le respect des 3 conditions citées précédemment, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous pouvons conclure que :

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} \right]^m + [(-1)^a - f(M; x)] \cdot (-1)^{(x.m)}}{M} \right\} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

Digression :

La conséquence de tout ces travaux est qu'il existe plusieurs écritures possibles pour obtenir des résultats équivalents.

Etant donné que $s(M)$ n'est qu'un cas particulier de $f(M; x)$, nous pouvons encore donner un exemple de réécriture avec la formule $s(M)$ puisque dans le cas où $x = 1$ et $N = M$, nous avons aussi de manière plus générale pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left[(M-1)!^m \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Ou encore, d'après les travaux de l'étude de la sous-partie “**3.8.1 Nombres factoriels et divisibilité par Pn**” (page 194), nous avons aussi pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left[(M-2)!^m \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

3.8.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par M , généralisation

Appliquons maintenant le raisonnement de la sous-partie précédente (“**3.8.6 Formule $f(M;x)$, puissance et divisibilité : Formule $D(N)$ généralisée**” page 217) aux formules de la sous-partie “**3.8.2 Produit de nombres factoriels et divisibilité par P_n** ” (page 199). Ici, les démonstrations vont être simplifiées pour améliorer la lisibilité.

Rappelons que nous avons déduit (pour 3 conditions) :

$$\frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)] \cdot (-1)^m}{M} = w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M}$$

Ce qui est équivalent à :

$$(M-1)!^m = M \cdot w_0 + s(M) \cdot (-1)^m$$

La cohérence de ces formules étant respectée pour les 3 conditions :

- CONDITION 1 :

- ▷ Quelquesoit $m \in \mathbb{N}$, tel que $m \geq 2$,
- ▷ Quelquesoit $M \in \mathbb{N}$, tel que $M \geq 2$,
- ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- CONDITION 2 :

- ▷ Pour $m = 1$ (dans ce cas, un défaut apparaît lorsque $M = 4$ seulement, cette valeur de M doit donc être évitée),
- ▷ Quelquesoit $M \geq 2$ telle que $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (à cause du défaut relaté),
- ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- CONDITION 3 :

- ▷ Pour $m = 0$,
- ▷ Pour $M \in \mathbb{P}$ uniquement,
- ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

Divisons encore l'étude avec des sous-parties tel que :

* **Sous-Partie 1 :**

Reprenons le raisonnement depuis : $(M - 1)!^m = M.w_0 + s(M).(-1)^m$

En changeant w_0 en W_1 et en précisant que $W_1, W_2, W_3, \dots, W_{b1}$ est toujours un nombre entier (pour rendre la démonstration plus claire) où $b1 \in \mathbb{N}, b1 \geq 2$:

$$(M - 1)!^m = M.W_1 + s(M).(-1)^m$$

Raisonnons dans le cas de la “*CONDITION 2*” où $m = 1$ (ce cas est plus simple car il évite d'avoir à développer le produit dû à la puissance m) par étapes :

$$(M - 1)! = M.W_1 - s(M) \quad \text{pour } M \in \mathbb{N} - \{4\} \text{ tel que } M \geq 2.$$

- *Etape 1 :*

$$\begin{aligned} (M - 1)! &= M.W_1 - s(M) \\ (M - 1).(M - 2)! &= M.W_1 - s(M) \\ M.(M - 2)! - 1.(M - 2)! &= M.W_1 - s(M) \\ (M - 2)! &= M.[(M - 2)! - W_1] + s(M) \\ (M - 2)! &= M.W_2 + s(M) \end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (CONDITION 2) tel que $M \geq 2$.

- *Etape 2 :*

$$\begin{aligned} (M - 2)! &= M.W_2 + s(M) \\ (M - 2).(M - 3)! &= M.W_2 + s(M) \\ M.(M - 3)! - 2.(M - 3)! &= M.W_2 + s(M) \\ 2.(M - 3)! &= M.[(M - 3)! - W_2] - s(M) \\ 2.(M - 3)! &= M.W_3 - s(M) \end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (CONDITION 2) tel que $M \geq 3$.

- *Etape 3 :*

$$\begin{aligned}
2.(M-3)! &= M.W_3 - s(M) \\
2.(M-3).(M-4)! &= M.W_3 - s(M) \\
2.M.(M-4)! - 2.3.(M-4)! &= M.W_3 - s(M) \\
2.3.(M-4)! &= M.[2.(M-4)! - W_3] + s(M) \\
2.3.(M-4)! &= M.W_4 + s(M) \\
3!. (M-4)! &= M.W_4 + s(M)
\end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (CONDITION 2) tel que $M \geq 4$, ce qui revient à $M \geq 5$ (puisque 4 doit être en dehors du domaine de définition de M).

- *Etape 4 :*

$$\begin{aligned}
3!. (M-4)! &= M.W_4 + s(M) \\
3!. (M-4).(M-5)! &= M.W_4 + s(M) \\
3!.M.(M-5)! - 4!. (M-5)! &= M.W_4 + s(M) \\
4!. (M-5)! &= M.[3!. (M-5)! - W_4] - s(M) \\
4!. (M-5)! &= M.W_5 - s(M)
\end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 5$ (à partir de cette étape, nous n'avons plus besoin de restreindre le domaine de définition de M comme le préconise la CONDITION 2 afin d'éviter le cas où $M = 4$, puisque ce cas est nécessairement évité dès que $M \geq 5$).

- *Etape 5 :*

$$\begin{aligned}
4!. (M-5)! &= M.W_5 - s(M) \\
4!. (M-5).(M-6)! &= M.W_5 - s(M) \\
4!.M.(M-6)! - 5!. (M-6)! &= M.W_5 - s(M) \\
5!. (M-6)! &= M.[4!. (M-5)! - W_5] + s(M) \\
5!. (M-6)! &= M.W_6 + s(M)
\end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 6$.

...

- Etape $(b1 - 1)$, nous obtenons finalement :

$$(b1 - 1)!.(M - b1)! = M.W_{b1} + s(M).(-1)^{b1}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $M \geq b1$, tel que $b1 \in \mathbb{N}$ et $b1 \geq 2$.

Donc

$$\frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} = W_{b1} + \frac{s(M).(-1)^{b1}}{M}$$

Et donc

$$\sin^2 \left[\pi. \frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} \right] = \sin^2 \left\{ \pi. \left[W_{b1} + \frac{s(M).(-1)^{b1}}{M} \right] \right\}$$

Si $M \in \mathbb{P}$, nous avons $s(M) = 1$:

$$\sin^2 \left[\pi. \frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} \right] = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

D'où

$$\frac{\sin^2 \left[\pi. \frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

Si $M \notin \mathbb{P}$ (CONDITION 2 : éviter le cas de $M = 4$), nous avons $s(M) = 0$:

$$\sin^2 \left[\pi. \frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} \right] = 0$$

D'où

$$\frac{\sin^2 \left[\pi. \frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

Et finalement :

$$\frac{\sin^2 \left[\pi. \frac{(b1 - 1)!.(M - b1)!}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = s(M)$$

- *Cas particulier :*

Pour $(b1 - 1) = (M - b1)$ nous sommes dans le cas particulier où le calcul est réduit au minimum (calcul “optimal”).

Dans ce cas, nous avons :

$$M = 2.b1 - 1 \quad \text{c'est-à-dire le cas de } M \text{ étant un nombre impair.}$$

Comme nous devons avoir $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, nous devons aussi avoir $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$.

$$b1 = \frac{M + 1}{2}$$

(comme M est impaire, il n'est plus utile de conseiller ici d'éviter le cas de $M = 4$ préconisé par la CONDITION 2)

Nous pouvons conclure que, pour $M = 2.b1 - 1$ et pour $b1 \in \mathbb{N}$ tel que $b1 \geq 2$:

$$\frac{\sin^2 \left[\left(\frac{M-1}{2} \right)!^2 \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = s(M)$$

(Ce qui est une alternative à la démonstration du paragraphe “**3.8.2 Produit de nombres factoriels et divisibilité par Pn**” page 199)

- *Remarque :*

Pour $b1 = \frac{M + 1}{2}$, nous avons aussi :

$$\frac{(b1 - 1)! \cdot (M - b1)!}{M} = W_{b1} + \frac{s(M) \cdot (-1)^{b1}}{M}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{M-1}{2} \right)!^2 &= M.W_{b1} + s(M) \cdot (-1)^{\left(\frac{M+1}{2} \right)} \\ &= M.W_{b1} + s(M) \cdot (i)^{(M+1)} \quad (\text{où } i \text{ est le nombre imaginaire}) \end{aligned}$$

* **Sous-Partie 2 :**

Ce n'est qu'à partir de maintenant que le raisonnement va trouver un intérêt significatif (l'intérêt viendra de la synthèse des parties que nous allons aborder). Ce raisonnement porte sur le cas particulier précédent. Changeons quelque peu les notations : $W_{b1,c}$ est un nombre entier avec c un nombre entier. Reprenons par étape :

$$\left(\frac{M-1}{2}\right)!^2 = M.W_{b1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M = 2.b1 - 1$, avec $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$.

- *Etape 1 :*

Notons $W_{b1} = W_{b1,1}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{M-1}{2}\right)!^2 &= M.W_{b1,1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)} \\ \left(\frac{M-1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{M-1}{2} - 1\right)!^2 &= M.W_{b1,1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)} \\ (M-1)^2 \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 &= 2^2.M.W_{b1,1} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)} \\ (M^2 - 2M + 1) \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 &= 2^2.M.W_{b1,1} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)} \end{aligned}$$

En développant, nous obtenons des multiples de M , que nous allons tous regrouper dans le membre de droite de l'égalité, pour obtenir :

$$M.(M-2) \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 + 1 \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,1} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$1 \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,1} - M.(M-2) \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$1 \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M. \left[W_{b1,1} - (M-2) \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 \right] + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Or, $2^2 \cdot \left[W_{b1,1} - (M-2) \cdot \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 \right]$ est un nombre entier, notons le $W_{b1,2}$.

(**ATTENTION** : pour les étapes suivantes, nous ne détaillerons pas autant le passage que nous venons d'effectuer, qui développe et regroupe les multiples de M , car il est finalement évident à comprendre)

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$ (avec $M = 2.b1 - 1$), nous avons donc :

$$\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,2} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

- Etape 2 :

$$\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,2} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{M-3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,2} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(M^2 - 6M + 3^2) \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,2} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$M(M-6) \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,2} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2 \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M \cdot \left[2^2.W_{b1,2} - (M-6) \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2 \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,3} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 5$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

- Etape 3 :

$$3^2 \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,3} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2 \cdot \left(\frac{M-5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,3} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2.(M^2 - 10M + 5^2) \cdot \left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,3} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5)^2 \cdot \left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M \cdot \left[2^2.W_{b1,3} - (M-10) \cdot \left(\frac{M-7}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5)^2 \cdot \left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,4} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 7$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

- Etape 4 :

$$(3.5)^2. \left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,4} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5)^2. \left(\frac{M-7}{2}\right)^2. \left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,4} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5)^2.(M^2 - 14M + 7^2). \left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,4} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5.7)^2. \left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M. \left[2^2.W_{b1,4} - (M-14). \left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 \right] + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5.7)^2. \left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,5} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 9$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

- Etape 5 :

$$(3.5.7)^2. \left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,5} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5.7)^2. \left(\frac{M-9}{2}\right)^2. \left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,5} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5.7)^2.(M^2 - 18M + 9^2). \left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,5} + s(M).2^{10}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5.7.9)^2. \left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = M. \left[2^2.W_{b1,5} - (M-18). \left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 \right] + s(M).2^{10}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5.7.9)^2. \left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,6} + s(M).2^{10}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 11$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

...

- Etape $b2 = (c - 1)$:

$$\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2 = M.W_{b1,c} + s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2.b2 + 1$ (et avec $M = 2.b1 - 1$ pour $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$).

Donc

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} = W_{b1,c} + \frac{s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

Et donc

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \left[W_{b1,c} + \frac{s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right] \right\} \end{aligned}$$

Si $M \in \mathbb{P}$, nous avons $s(M) = 1$:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \left[W_{b1,c} + \frac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right] \right\} \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} \right\}}{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{2^{2.b2} \cdot (-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right\}} = 1$$

Si $M \notin \mathbb{P}$, nous avons $s(M) = 0$:

$$\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} \right\} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} \right\}}{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{2^{2.b2} \cdot (-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right\}} = 0$$

Et donc finalement, pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2.b2 + 1$ (et avec $M = 2.b1 - 1$ pour $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$), nous retrouvons les mêmes égalités que pour $s(M)$:

$$\frac{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} \right\}}{\sin^2 \left\{ \pi \cdot \frac{2^{2.b2} \cdot (-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right\}} = s(M)$$

Ce qui permet encore de réduire les calculs.

- *Cas particuliers* :

Pour $2.b2 - 1 = \frac{(M - 2.b2 - 1)}{2}$, nous sommes dans le cas particulier où le calcul est optimal. Nous avons :

$$M = 6.b2 - 1 \quad \text{ou équivalent :} \quad b2 = \frac{M + 1}{6}$$

D'où

$$\frac{(M - 2.b2 - 1)}{2} = \frac{M - 2}{3}$$

Pour la formule :

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2.b2 - 1}{2} \right)!^2}{M} = W_{b1,c} + \frac{s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

Nous obtenons donc, pour $M = 6.b2 - 1$ et pour $b2 \in \mathbb{N}$, $b2 \geq 1$ (et avec $W_{b1,c} = W_{b2}$) :

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=\frac{M+1}{6}} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2}{3} \right)!^2}{M} = W_{b2} + \frac{s(M).2^{\left(\frac{M+1}{3}\right)}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

Et donc, pour $M = 6.b2 - 1$ et pour $b2 \in \mathbb{N}$, $b2 \geq 1$:

$$\frac{\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{\left[\prod_{h=2}^{h=\frac{M+1}{6}} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M - 2}{3} \right)!^2}{M} \right]}{\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{2^{\left(\frac{M+1}{3}\right)}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M} \right]} = s(M)$$

* Sous-Partie 3 :

Poursuivons le raisonnement à partir de ce dernier cas particulier. Changeons quleque peu les notations : $W_{b2,c}$ est un nombre entier avec c un nombre entier. Reprenons par étape :

- *Etape 1 :*

Notons $W_{b2} = W_{b2,1}$

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=\frac{M+1}{6}} (2.h - 1)^2 \right] \cdot \left(\frac{M-2}{3} \right)!^2}{M} = W_{b2,1} + \frac{s(M).2^{\left(\frac{M+1}{3}\right)}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

SUITE EN COURS
DE REALISATION !

Pour que la fromule $s(M)$ soit exploitable, nous devons concentrer tous nos efforts à essayer de lui donner des équivalences, en développant notamment les cas particulier où elle exige moins de calculs (sur le modèle de cette sous-partie), ce qui devrait permettre de généraliser jusqu'à obtenir une formule qui rende son calcul optimal.

C'est justement l'objectif que se propose d'atteindre le **Chapitre 4**.

3.8.8 Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de RIEMANN

- Rappels :

Etant donné la fonction ζ de *RIEMANN*, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

En exploitant la méthode du produit Eulérien, nous avons :

$$S = 1 + u^1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \dots$$

(somme infinie de termes en puissance de “ u ”, aux puissances croissantes)

Or,

$$S = 1 + u.S$$

Donc

$$S = \frac{1}{1 - u}$$

D'où

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u^1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \dots$$

Pour $u = p^{-s}$ (avec $s > 0$), nous avons l'égalité :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} n^{-s}$$

- 1ière réécriture :

Etant donné la formule de $s(M)$ établie dans la sous-partie “**3.1 Formule simplifiée $s(M)$** ” (page 139) :

$$\begin{aligned} s(M) &= 1 && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ s(M) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ (avec } M \in \mathbb{N}, M \geq 2) \end{aligned}$$

* Si $M \in \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} M^{-s} \cdot s(M) &= p^{-s} \\ 1 - M^{-s} \cdot s(M) &= 1 - p^{-s} \\ \frac{1}{1 - M^{-s} \cdot s(M)} &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \end{aligned}$$

* Si $M \notin \mathbb{P}$ (avec $M \in \mathbb{N}, M \geq 2$) :

$$\begin{aligned} M^{-s} \cdot s(M) &= 0 \\ 1 - M^{-s} \cdot s(M) &= 1 \\ \frac{1}{1 - M^{-s} \cdot s(M)} &= 1 \end{aligned}$$

Et donc la fonction ζ de *RIEMANN* peut aussi s’écrire ainsi :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - M^{-s} \cdot s(M)}$$

L’intérêt étant qu’il existe un lien entre la fonction ζ et la formule $s(M)$.

Poursuivons. Ceci implique que :

$$u = M^{-s}.s(M)$$

Nous avons :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u^1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \dots$$

D'où

$$\frac{1}{1-M^{-s}.s(M)} = 1 + \left[\frac{s(M)}{M^s} \right] + \left[\frac{s(M)}{M^s} \right]^2 + \left[\frac{s(M)}{M^s} \right]^3 + \left[\frac{s(M)}{M^s} \right]^4 + \dots$$

Sachant que :

$$s(M)^a = s(M) \quad (\text{pour } a \in \mathbb{N}, a \geq 1)$$

Nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-M^{-s}.s(M)} &= 1 + s(M). \left[\frac{1}{M^s} + \frac{1}{M^{2s}} + \frac{1}{M^{3s}} + \frac{1}{M^{4s}} + \dots \right] \\ &= 1 + s(M). \sum_{a=1}^{a \rightarrow +\infty} M^{-s.a} \end{aligned}$$

Lorsque $s(M) = 0$ (donc $M \notin \mathbb{P}$), la cohérence est bien respectée.

Lorsque $s(M) = 1$ (donc $M \in \mathbb{P}$), la cohérence est bien respectée.

La fonction ζ de *RIEMANN* peut donc être réécrite tel que nous l'avons fait.

- 2ième réécriture :

En se concentrant sur les propriétés de la fonction $s(M)$, nous pouvons encore réécrire la fonction ζ sous une autre forme. En effet, en rappelant que nous avons :

$$s(M)^2 = s(M)$$

$$s(M)^2 - s(M) = 0$$

Nous pouvons alors écrire :

$$(M^s - M^s) + (M^{2s} - M^{2s}) + [s(M).M^s - s(M).M^s] + [s(M)^2 - s(M)] = 0$$

D'où

$$-(M^s - M^{2s}) + [M^s - s(M) - M^{2s} + s(M).M^s - s(M).M^s + s(M)^2] = 0$$

$$M^s.(1 - M^s) = [M^s - s(M)].[1 - M^s - s(M)]$$

$$\frac{M^s}{M^s - s(M)} = \frac{1 - M^s - s(M)}{1 - M^s}$$

$$\frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)} = 1 - \frac{s(M)}{1 - M^s}$$

D'après l'égalité que nous venons d'établir, nous obtenons la réécriture :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{s(M)}{1 - M^s} \right]$$

- 3ième réécriture :

A partir d'un raisonnement similaire, une dernière réécriture peut encore être faite :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{1 - M^{-s}} \right)^{s(M)} \right]$$

3.8.9 Réécriture de la conjecture de GOLDBACH

Il est possible de réécrire la conjecture de *GOLDBACH* (sans prétention de la résoudre). La conjecture de *GOLDBACH* affirme que tout nombre paire supérieur ou égale à 4 peut être écrit comme la somme de 2 nombres premiers. C'est-à-dire que pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et pour P_{n1} et P_{n2} , il serait possible d'écrire :

$$2.N = P_{n1} + P_{n2}$$

Etablissons le raisonnement suivant en notant M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 2$. Nous avons l'équivalence :

$$2.N = M_1 + M_2$$

D'après les égalités établies précédemment, nous pouvons noter que :

(voir le paragraphe intitulé “**Autres équivalences de formules 1**” de la sous-partie “**3.7 Equivalences de formules**” page 164)

$$\begin{aligned} M_1 &= (M_1 - 1)^{s(M_1)} + (M_1 - 1)^{[1-s(M_1)]} \\ &= 1 + (M_1 - 1)^{s(M_1)} + (M_1 - 1)^{[1-s(M_1)]} - 1 \end{aligned}$$

Or,

$$1 + (M_1 - 1)^{s(M_1)} \quad \text{vaut toujours un nombre premier (rappel)}$$

Et

$$\begin{aligned} M_2 &= (M_2 - 1)^{s(M_2)} + (M_2 - 1)^{[1-s(M_2)]} \\ &= 1 + (M_2 - 1)^{s(M_2)} + (M_2 - 1)^{[1-s(M_2)]} - 1 \end{aligned}$$

Or,

$$1 + (M_2 - 1)^{s(M_2)} \quad \text{vaut toujours un nombre premier}$$

Il devient possible de réécrire :

$$\begin{aligned} 2.N &= M_1 + M_2 \\ &= 1 + (M_1 - 1)^{s(M_1)} + 1 + (M_2 - 1)^{s(M_2)} + (M_1 - 1)^{[1-s(M_1)]} + (M_2 - 1)^{[1-s(M_2)]} - 2 \end{aligned}$$

Or, si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$, nous avons :

$$s(M_1) = s(M_2) = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} (M_1 - 1)^{[1-s(M_1)]} + (M_2 - 1)^{[1-s(M_2)]} - 2 &= 1 + 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et donc

$$2.N = [1 + (M_1 - 1)^{s(M_1)}] + [1 + (M_2 - 1)^{s(M_2)}]$$

Et donc, si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$, il deviendrait ainsi possible d'exprimer un nombre paire comme la somme de 2 nombres premiers.

Récapitulons :

Pour $2.N = M_1 + M_2$, nous avons :

$$M_2 = 2.N - M_1$$

Si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$, nous devrions donc avoir :

$$M_1 \in \mathbb{P} \text{ et } (2.N - M_1) \in \mathbb{P}.$$

C'est-à-dire que nous devons rechercher à savoir si nous avons toujours :

$$s(M_1) = s(2.N - M_1) = 1$$

Cela signifie que nous devons rechercher à savoir si nous avons toujours :

$$(M_1 - 1)! + 1 = M_1.w_1$$

$$(w_1 \text{ est un nombre entier si } M_1 \in \mathbb{P})$$

et simultanément :

$$(2.N - M_1 - 1)! + 1 = (2.N - M_1).w_{1'}$$

$$(w_{1'} \text{ est un nombre entier si } (2.N - M_1) \in \mathbb{P})$$

Et finalement, cela revient à savoir si, avec $2.N > M_1$ et avec $M_1 \in \mathbb{P}$, nous avons pour tout N :

$$(2.N - M_1 - 1)! + 1 = (2.N - M_1).w_{1'} \quad (\text{avec } w_{1'} \text{ un nombre entier})$$

Si tel était le cas, cela rendrait la conjecture de *GOLDBACH* vraie.

Digression :

Signalons que dans ce cas, nous aurions également :

$$N = \frac{(P_{n1} + P_{n2})}{2} \quad \text{pour } N \in \mathbb{N}, N \geq 2 \text{ et pour } P_{n1} \text{ et } P_{n2} \in \mathbb{P}$$

Or, pour $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$, nous pouvons décomposer N tel que $N = D(N)$,

Et donc, nous pourrions écrire :

$$D(N) = \frac{(P_{n1} + P_{n2})}{2}$$

Une piste pour la résolution du problème :

Comme la conjecture de Golbach l'indique nous cherchons à savoir si pour tout $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$:

$$2.N = M_1 + M_2 \quad \text{avec } M_1 \text{ et } M_2 \in \mathbb{P} \text{ simultanément.}$$

En logique binaire (correspondant à l'algèbre de *BOOLE*), cela fait penser à une porte logique “ *ET* ”. D'un point de vue strictement mathématique, cela se traduit par :

$$s(M_1).s(M_2) = 1$$

Or, pour M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$, tel que M_1 et $M_2 \geq 2$:

- Si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$ simultanément, nous avons :

$$s(M_1).s(M_2) = 1$$

Donc

$$M_1^{[s(M_1).s(M_2)]} = M_1$$

Et

$$M_2^{[s(M_1).s(M_2)]} = M_2$$

- Si seulement $M_1 \notin \mathbb{P}$ ou seulement $M_2 \notin \mathbb{P}$, nous avons :

$$s(M_1).s(M_2) = 0$$

Donc

$$M_1^{[s(M_1).s(M_2)]} = 1$$

Et

$$M_2^{[s(M_1).s(M_2)]} = 1$$

- En réunissant ces 2 conditions, nous avons :

$$M_1^{[s(M_1).s(M_2)]} + M_2^{[s(M_1).s(M_2)]} = 2$$

si seulement $M_1 \notin \mathbb{P}$ ou seulement $M_2 \notin \mathbb{P}$.

Ou

$$M_1^{[s(M_1).s(M_2)]} + M_2^{[s(M_1).s(M_2)]} = M_1 + M_2$$

si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$ simultanément.

Si la conjecture de *GOLDBACH* était vraie, nous pourrions alors écrire :

$$2.N = M_1^{[s(M_1).s(M_2)]} + M_2^{[s(M_1).s(M_2)]}$$

Et étendre le domaine de définition de N à $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$.

Une autre écriture possible serait :

$$2.N = (M_1 + M_2 - 2).s(M_1).s(M_2) + 2$$

La conjecture de *GOLDBACH* ne serait alors qu'un cas particulier de ces 2 dernières formules. Pour savoir si la conjecture de *GOLDBACH* est vraie, il faut donc savoir si ces formules que nous venons d'établir sont vraies pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 1$ et quelquesoit M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$, tel que M_1 et $M_2 \geq 2$.

4

Remarques : formule $D(N)$ et phénomènes physiques associés

J'ai l'intuition que ces formules pourraient être une base solide pour développer une théorie physique (mathématiques appliquées), étant donné le lien entre la fonction *SINUS*, le cercle et les ondes, cela pourrait permettre de donner une interprétation géométrique. Un rapprochement peut être fait entre la variable N (utilisée tout au long de l'étude) et les phénomènes vibratoires divers (l'onde d'un photon, par exemple). La formule $D(N)$ appliquée à une onde permettrait de décomposer une onde en longueurs d'ondes fondamentales. Ceci pourrait être utile à l'analyse harmonique, entre autres.

De plus, étant donné les formules étudiées (telles que $s(M)$ par exemple), l'approche est intéressante du point de vue de la logique binaire (ces formules ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1) qui émerge de ces formules liées aux ondes. D'où l'on peut constater que : si une telle formule permet d'effectuer des traitements (c'est-à-dire des calculs de congruence) sur des ondes, dont les résultats sont exclusivement binaires, alors il doit exister une géométrie spatiale correspondante où "l'agencement adéquat" de ces ondes permet de faire émerger une logique binaire.

Remarques, essais et hypothèses :

Dans le cas de la décomposition des ondes, nous pouvons décomposer une variable associée. Il nous reste à savoir laquelle choisir. Nous pouvons être tentés de vouloir décomposer la variable correspondant à la fréquence, celle correspondant à la période ou celle correspondant à la longueur d'onde.

Pour ma part, les graphiques de la première partie suggèrent plutôt d'étudier des cycles, ce qui implique d'étudier la "distance" entre un nombre multiple de M^x et son prochain multiple. La formule $f(M; x)$ ne valant 1 que pour N égale à un des ces multiples (la formule vaut 0 sinon). Ceci ferait plus naturellement penser à une répétition de cycle tel que la longueur d'onde ou même tel que la période. Nous allons le vérifier en raisonnant suite à des essais.

- *Si nous essayons de décomposer une fréquence :*

Le désavantage de vouloir décomposer une fréquence f en l'assimilant à N , de telle sorte que $f = N$, est que cette fréquence devrait avoir un minimum en $f = 2$. Ce qui impose à l'étude de la décomposition d'une fréquence en fréquences fondamentales d'admettre une période T maximum ($T = \frac{1}{f}$), et pas de minimum pour T (puisque f n'aurait pas de limite maximum). Or, rien n'empêcherait de produire une période plus grande, simplement en ralentissant le temps de répétition d'un phénomène (même en agissant "manuellement" sur le système étudié).

Ceci ne semble pas être en accord avec la physique quantique qui donnerait plutôt une limite minimum à un intervalle de temps (connue sous le nom de temps de *PLANCK*) et une limite minimum pour une distance (connue sous le nom de longueur de *PLANCK*). En-dessous de cette limite, les formules n'ont plus de sens. Ce qui serait exactement l'inverse des constats de la physique quantique.

- *Si nous essayons de décomposer une longueur d'onde :*

Il est possible de décomposer la longueur d'onde en longueurs d'ondes plus simples. Dans ce cas, en assimilant la longueur d'onde λ d'un phénomène ondulatoire à la variable N de la formule $D(N)$, de telle sorte que $\lambda = N$, c'est la longueur d'onde qui connaît un minimum en $\lambda = 2$. Ce qui impose à l'étude de la décomposition d'une longueur d'onde en longueurs d'ondes fondamentales d'admettre une longueur d'onde minimum (et donc une distance minimum dont la mesure vaut 1 unité), une période T minimum et donc une fréquence f maximum. Dans ce cas, il n'y aurait pas de limite maximum de longueur d'onde,

pas de limite maximum de période et donc pas de limite minimum de fréquence.

Ce cas semble être plus cohérent par rapport à la limite de la longueur de *PLANCK* en physique quantique. C'est donc à partir de cette variable que nous élaborerons une théorie de décomposition d'une longueur d'onde en longueurs d'ondes fondamentales (voir **Chapitre 6**). De plus, le domaine de définition de $N \in \mathbb{N}$ implique que la longueur d'onde soit discontinue.

- *Si nous essayons de décomposer une période :*

Il reste encore possible de décomposer la période (qui vaut l'inverse de la fréquence) d'un phénomène cyclique en périodes fondamentales. Dans ce cas, en assimilant la période T d'un phénomène cyclique à la variable N de la formule $D(N)$, de telle sorte que $T = N$, c'est la période qui connaît un minimum en $T = 2$. Ce qui est cohérent avec la conclusion de la décomposition d'une longueur d'onde. Donc l'on déduit exactement les mêmes choses à propos des minimum et des maximum des grandeurs physiques que pour la décomposition d'une longueur d'onde.

Ce dernier cas reste cohérent par rapport à la limite du temps de *PLANCK* en physique quantique. C'est donc à partir de cette variable que nous élaborerons une théorie de décomposition d'une période en périodes fondamentales (voir **Chapitre 6**). De plus, le domaine de définition de $N \in \mathbb{N}$ implique que la période soit également discontinue.

Plus généralement, nous trouvons 2 cas en cohérence l'un avec l'autre, ce qui devrait permettre une généralisation de l'application de la formule $D(N)$ à tous les phénomènes cycliques (la justification sera donnée au début du **Chapitre 6**).

Chapitre 2 sur 6 :

**Reconstitution de
fonctions connues,
lien avec les polynômes**

(Voir chapitre correspondant pour la suite)